BÀI 3

PHÉP QUY NẠP VÀ ĐỆ QUY

Vũ Thương Huyền

huyenvt@tlu.edu.vn

NỘI DUNG

- **Quy nạp toán học**
- **Đệ quy**

3.3 QUY NẠP TOÁN HỌC

Các phương pháp chứng minh cơ sở:

- Chứng minh trực tiếp, chứng minh gián tiếp, chứng minh phản chứng, chứng minh từng trường hợp, chứng minh tương đương

Chứng minh bằng quy nạp

- Là kĩ thuật sử dụng để chứng minh các mệnh đề phổ quát trên tập các số nguyên dương, $\forall x\, P(x)$ với $x \in Z^+$.

- Bao gồm 2 bước:

  1) **Bước cơ sở**: chỉ ra mệnh đề ***P(1)*** là đúng

  2) **Bước quy nạp**: Chứng minh mệnh đề kéo theo ***P(k) → P(k+1)*** là đúng với mọi số nguyên dương *k*

Ví dụ 1: Bằng quy nạp toán học, chứng minh tổng *n* số nguyên dương lẻ đầu tiên là n^2

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

- **Bước cơ sở**: P(1) luôn đúng vì $1 = 1^2$
- **Bước quy nạp**: giả định P(n) đúng, tức là:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Khi đó P(n+1) $= 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1)$

$$= n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

- Vì P(1) đúng và mệnh đề kéo theo $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi *k*. Nên P(n) đúng với mọi *n* nguyên dương

Ví dụ 2: Bằng quy nạp toán học, chứng minh bất đẳng thức $n < 2^n$

Ví dụ 3: Bằng quy nạp toán học, chứng minh tổng hữu hạn các số hạng cấp số nhân:

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$$

Phép quy nạp mạnh

- Giả sử rằng P(j) đúng với $j = 1, 2, 3, \ldots, k$ và phải chứng minh $P(k+1)$ đúng

- Bao gồm 2 bước:

  1) **Bước cơ sở**: chỉ ra mệnh đề ***P(1)*** là đúng

  2) **Bước quy nạp**:

  Chứng tỏ $[\boldsymbol{P(1)} \wedge \boldsymbol{P(2)} \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{P(k)}] \rightarrow \boldsymbol{P(k+1)}$ là đúng với mọi số nguyên dương k

3.3 QUY NẠP TOÁN HỌC

Ví dụ: Chứng tỏ rằng mọi bưu phí bằng tay lớn hơn 12 xu đều có thể trả chỉ bằng các con tem 4 xu và 5 xu.

- **Bước cơ sở**: P(12) luôn đúng vì bưu phí 12 xu = 3* 4xu
- **Bước quy nạp**:

  - P(13) = 2*4xu + 5xu

  - P(14) = 1*4xu +2 *5xu

  - P(15) = 3*5xu

  - với k≥15, giả sử P(k) đúng, ta có:

  P(k+1) = P(k-3) + 3+1 = P(k-3) + 4xu mà P(k-3) có thể trả bằng tem 4xu và 5xu. Do đó P(k+1) đúng

BÀI TẬP

- **Bài 1**: Tìm công thức tính tổng:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n.(n+1)}$$

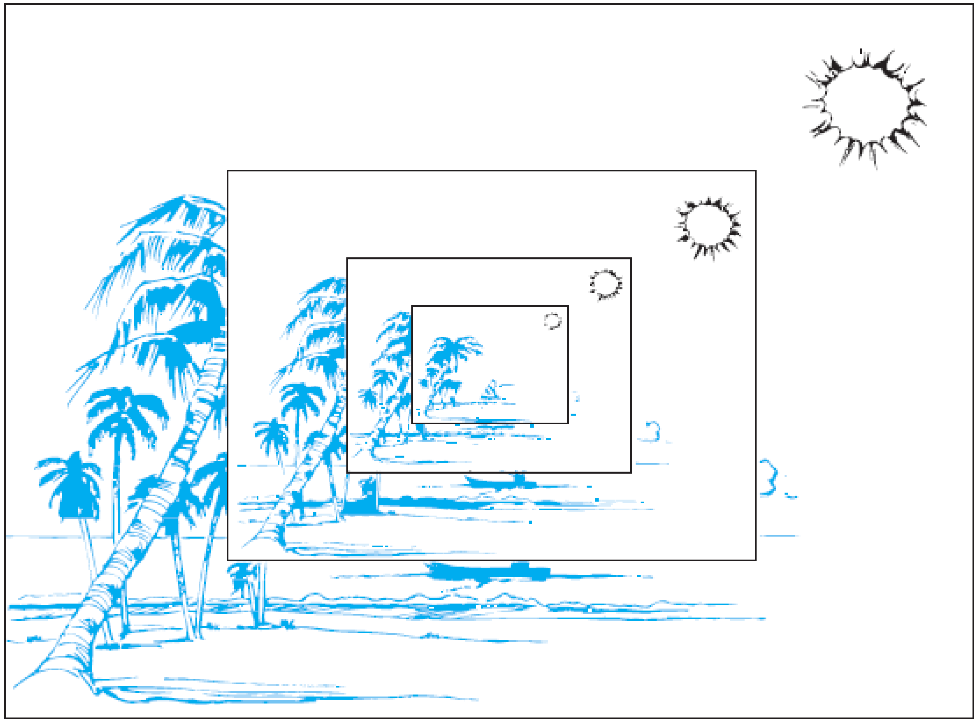
bằng cách quan sát các giá trị của biểu thức với các giá trị nhỏ của n.

Dùng quy nạp toán học để chứng minh kết quả vừa tìm được.

- **Bài 2**: Chứng tỏ rằng $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, với n là số nguyên dương.

3.4 ĐỊNH NGHĨA ĐỆ QUY

3.4 ĐỆ QUY



- **Phép đệ quy**: Định nghĩa đối tượng qua chính nó

3.4 ĐỆ QUY

Định nghĩa đệ quy

- Là định nghĩa một dãy, tập hợp bằng cách chỉ định các số hạng của dãy được tìm qua các số hạng trước đó

- <u>Các hàm được định nghĩa bằng đệ quy:</u>

1) **Bước cơ sở**: cho giá trị của hàm tại 0

2) **Bước đệ quy**: Cho quy tắc tính giá trị của nó tại một số nguyên *n* từ các giá trị nhỏ hơn *n*

Ví dụ: Định nghĩa đệ quy của hàm giai thừa *F(n) = n!*

- **Bước cơ sở**: F(0) = 0! = 1
- **Bước đệ quy**:

  - F(1) = 1*F(0) = 1.1 = 1
  - F(2) = 2*F(1) = 2.1 = 2
  - F(3) = 3*F(2) = 3.2 = 6
  - F(n) = n*F(n-1)

Định nghĩa 1:

Các số **Fibonaci** f_0, f_1, f_2... được định nghĩa bởi các phương trình:
$f_0=0$, $f_1= 1$ *và*

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

trong đó n= 2, 3, 4,...

Ví dụ:

- Tìm các số hạng f_2 ,f_3 ,f_4 ,f_5 ,f_6 của dãy Fibonacci

BÀI TẬP

- **Bài 3**: Hãy định nghĩa đệ quy của hàm sau:

  a) $\boldsymbol{a^n}$

  b) $\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n} k}$

- **Bài 4**: Hãy cho định nghĩa đệ quy của dãy $\{a_n\}$, n = 1, 2, ... nếu

  a) $\boldsymbol{a_n = 6n}$

  b) $\boldsymbol{a_n = 2n + 1}$

  c) $\boldsymbol{a_n = 10^n}$

  d) $\boldsymbol{a_n = 5}$

CÁC TẬP HỢP ĐƯỢC ĐỊNH NGHĨA ĐỆ QUY

Định nghĩa 2:

Tập $\sum *$ các *xâu* trên bộ chữ cái $\sum$ được định nghĩa đệ quy như sau:
BƯỚC CƠ SỞ: $\lambda \in \sum *$ (ở đây λ là một xâu rỗng không chứ kí tự nào
BƯỚC ĐỆ QUY: nếu $w \in \sum *$ và $x \in \sum$ thì $wx \in \sum *$

Ví dụ:

- Nếu $\sum = \{0, 1\}$
- Bước cơ sở: λ
- Bước đệ quy 1: là các xâu: 0, 1
- Bước đệ quy 2: là các xâu 00, 01, 10, 11
- Bước đệ quy 3: các xâu: 000, 010, 100, 110, 001, 011, 101, 111

<u>Ví dụ</u>: Định nghĩa tập hợp các công thức được tạo đúng cho các mệnh đề phức hợp

- Mệnh đề phức hợp tham gia của: **T, F**,biến mệnh đề, các toán tử $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- Bước cơ sở: T, F, *p* là biến mệnh đề là các công thức được tạo đúng
- Bước đệ quy: Nếu E và F là các công thức được tạo đúng thì $(\neg E)$, $(E \wedge F)$, $(E \vee F)$, $(E \rightarrow F)$, $(E \leftrightarrow F)$

Định nghĩa 1:

Một thuật toán được gọi là ***đệ quy***, nếu nó giải một bài toán bằng cách *rút gọn liên tiếp bài toán* đó tới giai đoạn của chính bài toán ban đầu nhưng có dữ liệu đầu vào nhỏ hơn

Ví dụ : Tìm thuật toán đệ quy tính giá trị a^n, với a là số thực khác 0 và n là số nguyên không âm.

THUẬT TOÁN : **Thuật toán đệ quy tính a^n**

Procedure *power(a*: số thực khác 0; *n*: nguyên không âm)
if $n = 0$ **then** *power(a, n) := 1*
else *power(a,n) := a.power(a, n-1)*

3.5 CÁC THUẬT TOÁN ĐỆ QUY

Ví dụ 1: Biểu diễn thuật toán tính ước chung lớn nhất của hai số *a,b* như một thủ tục đệ quy.

Ví dụ 2: Biểu diễn thuật toán tìm kiếm tuyến tính và tìm kiếm nhị phân như một thủ tục đệ quy.

3.5 CÁC THUẬT TOÁN ĐỆ QUY

Tìm kiếm tuyến tính

THUẬT TOÁN : **Thuật toán đệ quy tìm kiếm tuyến tính**

Procedure *search (i, j, x)*
if $a_i = x$ *then*
        location := i
else if $i = j$ **then**
        location := 0
else
        search(i+1, j, x)

Tìm kiếm nhị phân

THUẬT TOÁN : **Thuật toán đệ quy tìm kiếm nhị phân**

Procedure *binary search (i, j, x*)
m := $\lfloor (i+j)/2 \rfloor$
if $x = a_i$ **then**
    location := *m*
else if (**x** < a_m **và** $i < m$ **)** **then**
    binary search(x,i, m-1)
else if ($x > a_m$ *và* $m < j$) **then**
    binary search(x,m+1, j)
else
    location :=0

BÀI TẬP

- **Bài 4**: Xây dựng thuật toán đệ quy tính n!

- **Bài 5**: Xây dựng thuật toán đệ quy tính các số **fibonacci**

BÀI TẬP

- **Bài 6**: Hãy đưa thuật toán đệ quy tìm tổng n số nguyên dương lẻ đầu tiên.

- **Bài 7**: Số hạng thứ n được định nghĩa như sau: $a_0 = 1$, $a_1=2$ và $a_n= a_{n-1}.a_{n-2}$, với $n = 2,3, 4...$

  a) Hãy định nghĩa hàm đệ quy để tính a_n

  b) Xây dựng thuật toán đệ quy để tính a_n