BÀI 4

ĐẾM CÁC PHẦN TỬ

Vũ Thương Huyền
huyenvt@tlu.edu.vn

NỘI DUNG

- **Cơ sở của phép đếm**
- **Nguyên lý chuồng chim bồ câu**
- **Chỉnh hợp và tổ hợp**
- **Các hệ số nhị thức**
- **Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng**
- **Sinh các hoán vị và tổ hợp**

4.1 CƠ SỞ CỦA PHÉP ĐẾM

4.1 CƠ SỞ CỦA PHÉP ĐẾM

- Giả định rằng ta có một tập các đối tượng cùng với thuộc tính của nó
- **Phép đếm** là xác định số lượng các đối tượng đó

Các nguyên lí đếm cơ bản

- Quy tắc nhân
- Quy tắc cộng

QUY TẮC NHÂN

Giả sử một thủ tục nào đó được tách ra thành một dãy hai nhiệm vụ. Nếu có n_1 để làm nhiệm vụ thứ nhất và n_2 cách để làm nhiệm vụ thứ hai sau khi nhiệm vụ thứ nhất đã được hoàn thành, thì sẽ có $\boldsymbol{n_1.n_2}$ cách thực hiện thủ tục này

Ví dụ 1: Có bao nhiêu số nhị phân có độ dài 7?

Ví dụ 2: Có nhiều nhất bao nhiêu biển đăng kí ô tô nếu mỗi biển chứa một dãy ba chữ cái và tiếp sau là ba chữ số?

QUY TẮC CỘNG

Giả sử có hai nhiệm vụ. Nhiệm vụ thứ nhất có thể được thực hiện bằng n_1 cách, nhiệm vụ thứ hai có thể thực hiện bằng n_2 cách và nếu hai việc này không thể làm đồng thời, thì sẽ có $\boldsymbol{n_1+n_2}$ cách làm một trong hai nhiệm vụ đó.

Ví dụ 1:

Để đi từ thành phố A đến thành phố B có thể đi bằng tàu, xe ô tô hoặc đi máy bay. Có 12 chuyến máy bay từ A tới B, có 5 chuyến tàu và 10 chuyến ô tô. Hỏi có bao nhiêu lựa chọn để đi từ A đến B?

NHỮNG BÀI TOÁN PHỨC TẠP HƠN

- Những bài toán phức tạp có thể giải được nếu sử dụng kết hợp cả hai **quy tắc nhân** và **quy tắc cộng**

Ví dụ 1: Mật khẩu để đăng nhập máy tính:

- Dài từ 6 đến 8 kí tự
- Mỗi kí tự là chữ cái hoa hoặc số
- Mỗi mật khẩu chứa ít nhất một chữ số
- **Hỏi có thể có bao nhiêu mật khẩu?**

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Nguyên lý bù trừ: Khi hai nhiệm vụ làm đồng thời
- Cộng số cách làm từng nhiệm vụ
- Trừ đi số cách làm đồng thời cả hai nhiệm vụ

Theo ngôn ngữ tập hợp:

Cho A_1, A_2 là các tập hợp, khi đó:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

<u>Ví dụ</u>: Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 8 bít hoặc được bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bít 00

BÀI TẬP

- **Bài 1**: Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 10 và có bit đầu tiên và bit cuối cùng bằng 1.

- **Bài 2**: Có bao nhiêu xâu gồm 8 chữ cái tiếng anh

    a) nếu các chữ cái có thể lặp lại

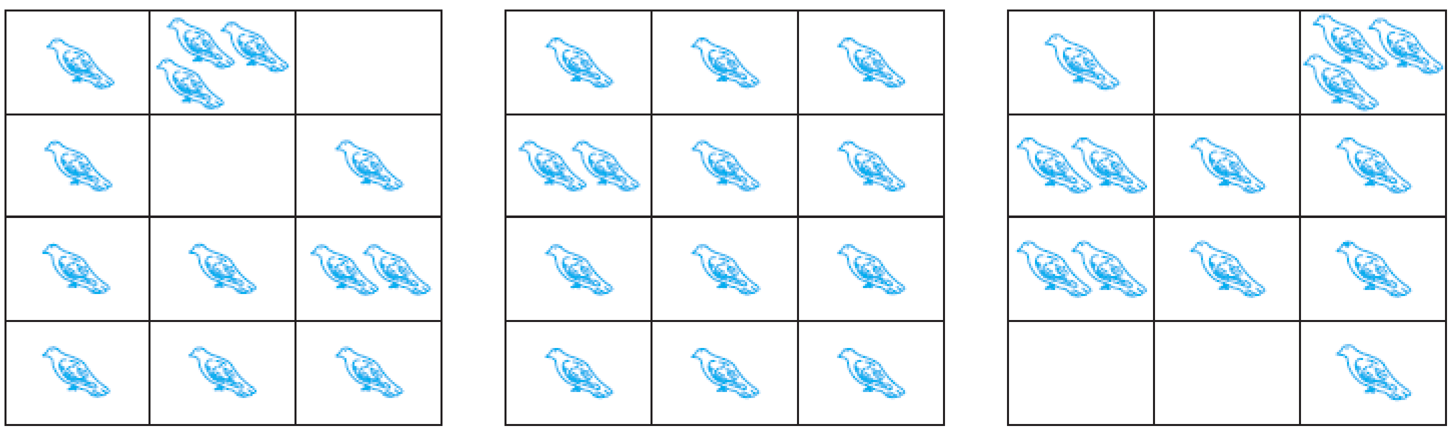
    b) nếu không chữ cái nào lặp lại

    c) bắt đầu với chữ cái X và nếu các chữ cái có thể được lặp lại

4.2 NGUYÊN LÍ CHUỒNG CHIM BỒ CÂU

4.2 NGUYÊN LÍ CHUỒNG CHIM BỒ CÂU

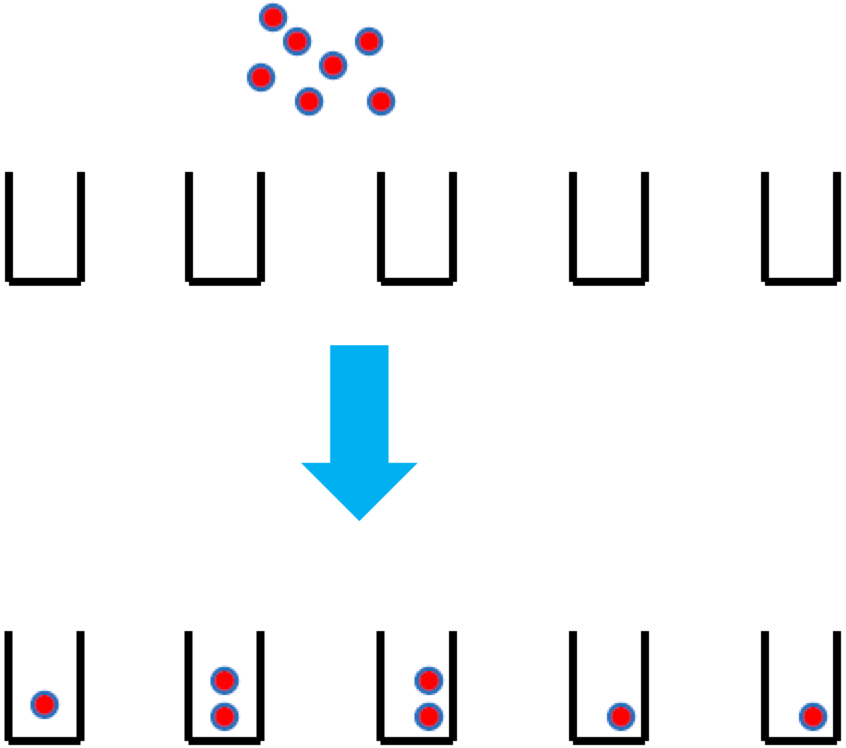
- Giả sử có một đàn chim bồ câu và một số chuồng
- **Nguyên lí chuồng chim bồ câu**: nếu số chim nhiều hơn số ngăn chuồng thì ít nhất trong một ngăn có 2 con hoặc nhiều hơn.



Định lí 1

Nếu có *(k+1)* đồ vật hoặc nhiều hơn được đặt vào *k* hộp, thì có ít nhất một hộp chứa hai hoặc nhiều hơn hai đồ vật.

Ví dụ: Có 7 quả bóng và có 5 hộp để đựng



4.2 NGUYÊN LÍ DIRICHLET TỔNG QUÁT

Định lí 2

Nếu có N đồ vật được đặt vào k hộp, thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\lceil N/k \rceil$ vật.

Ví dụ: Trong 100 người có ít nhất $\lceil 100/12 \rceil = 9$ người có cùng tháng sinh.

BÀI TẬP

- **Bài 3**: Hỏi phải có bao nhiêu sinh viên tham gia học đến từ 50 bang để đến khi tốt nghiệp ít nhất có 100 sinh viên thuộc cùng 1 bang.

- **Bài 4**: Giả sử có chín sinh viên trong lớp toán rời rạc của một trường đại học

  a) Chứng tỏ rằng lớp này có ít nhất năm sinh viên nam hoặc ít nhất năm sinh viên nữ

  b) Chứng tỏ rằng lớp này phải có ít nhất ba sinh viên nam hoặc ít nhất bảy sinh viên nữ

4.3 CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

HOÁN VỊ

- **Hoán vị** của một tập các đối tượng là một cách sắp xếp có thứ tự các đối tượng này.

Ví dụ:

- Cho tập S gồm các phần tử {a, b, c}
- Các hoán vị của tập S:

{ a, b, c} {b, a, c} {b, c, a} {c, b, a} {c, a, b} {a, c, b}

CHỈNH HỢP

- **Chỉnh hợp** chập *r* của *n* phần tử là cách sắp xếp có thứ tự *r* phần tử của một tập *n* phần tử.

Định lí 1

Số chỉnh hợp chập *r* của tập *S* gồm *n* phần tử là:

$$\boldsymbol{P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

- Số hoán vị của tập *n* phần tử là: ***P(n,n) = n!***

Ví dụ 1: Có bao nhiêu hóa vị của các chữ cái A, B, C, D, E, F, G, H có chứa xâu ABC

Ví dụ 2: Có bao nhiêu cách để chọn người đoạt giải nhất, giải nhì và giải ba trong một cuộc thi có 100 người khác nhau tham gia?

- **Tổ hợp chập r** của một tập hợp là cách chọn không có thứ tự *r* phần tử của tập đã cho.

Ví dụ:
- Tổ hợp chập 2 của tập hợp {a, b, c} là:

{ a, b} {b, c} {c, a}

Định lí 2

Số tổ hợp chập *r* từ tập có *n* phần tử, *n* là số nguyên dương và *r* là số nguyên, $0 \le r \le n$, được cho bởi công thức:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Hệ quả 1

Cho n và r là các số nguyên không âm sao cho $r \le n$. Khi đó:

$$C(n,r) = C(n, n-r)$$

Ví dụ 1: Có bao nhiêu cách tuyển năm trong số mười cầu thủ của một đội quần vợt để đi thi đấu tại một trường khác.

Ví dụ 2: Xác định số xâu bit có độ dài n và chứa đúng r bit 1

Ví dụ 3: Xác định số cách lựa chọn một hội đồng để triển khai môn toán rời rạc tại một trường đại học, nếu hội đồng gồm 3 thành viên của khoa toán, bốn thành viên của khoa tin. Khoa toán có 9 thành viên, khoa tin có 11 thành viên.

BÀI TẬP

- **Bài 5**: Có sáu ứng cử viên tranh cử chức thống đốc bang. Tính số cách in tên của các ứng cử viên lên phiếu bầu cử.

- **Bài 6**: Có bao nhiêu xâu bit độ dài 10 chứa:

  a) Đúng 4 bít 1

  b) Nhiều nhất 4 bít 1

  c) Ít nhất bốn bit 1

  d) Số bít 0 bằng số bit 1

4.4 CÁC HỆ SỐ NHỊ THỨC

4.4 CÁC HỆ SỐ NHỊ THỨC

- **Nhị thức** là tổng của hai số hạng

Định lí nhị thức

Cho x và y là hai biến và n là một số nguyên dương. Khi đó:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C(n,j)x^{n-j}y^j$$

$$= C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + \cdots + C(n,n-1)xy^{n-1} + C(n,n)y^n$$

4.4 CÁC HỆ SỐ NHỊ THỨC

Ví dụ 1: Tìm khai triển biểu thức ***(x+y)*⁴**

$$(x+y)^4 = \sum_{j=0}^{4} C(4,j)x^{4-j}y^j$$

$$= C(4,0)x^4 + C(4,1)x^3y + C(4,2)x^2y^2 + C(4,3)xy^3 + C(4,4)y^4$$

$$= \boldsymbol{x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4}$$

Ví dụ 2: Tìm hệ số của $x^{12}y^{13}$ khai triển biểu thức $\boldsymbol{(2x-3y)^{25}}$

4.4 CÁC HỆ SỐ NHỊ THỨC

Hệ quả 1

Nếu *n* là số nguyên không âm, thì:

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

Hệ quả 2

Nếu *n* là số nguyên dương, khi đó:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k) = 0$$

Hệ quả 3

Nếu *n* là số nguyên không âm, thì:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k C(n,k) = 3^n$$

Định lí 1

HẰNG ĐẲNG THỨC PASCAL. Cho n và k là các số nguyên dương, với $n \geq k$. Khi đó:

$$\boldsymbol{C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

				1						
			1		1					
		1		2		1				**2**
	1		3		3		1			**3**
1		4		6		4		1		**4**

HẰNG ĐẲNG THỨC PASCAL VÀ TAM GIÁC PASCAL

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

1	
1 1	
1 2 1	**2**
1 3 3 1	**3**
1 4 6 4 1	**4**
1 5 10 10 5 1	**5**
1 6 15 20 15 6 1	**6**
…	**7**

BÀI TẬP

- **Bài 7**: Tìm khai triển $(x + y)^7$

- **Bài 8**: Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển của $(2x-3y)^{200}$

4.5 CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP SUY RỘNG

4.4 CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP SUY RỘNG

Định lí 1

Số các **chỉnh hợp lặp** chập r từ n phần tử bằng $\boldsymbol{n^r}$.

Ví dụ:

- Có bao nhiêu xâu gồm hai kí tự sinh ra từ tập {a, b, c}

- **aa, ab, ac,**
- **bb, ba, bc,**
- **cc, ca, cb**

$$\mathbf{3.3 = 3^2 = 9}$$

Định lí 2

Có ***C*(*n*+*r*-1,*r*)** số **tổ hợp lặp chập r** từ tập *n* phần tử.

Ví dụ:
- Có bao nhiêu tổ hợp lặp chập 2 sinh ra từ tập {a, b, c}

- **aa, bb, cc,**
- **ab, bc, ac,**

$$\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\} \mathbf{C(3+2-1,2) = C(4,2)}$$

$$= \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

4.4 CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP SUY RỘNG

Ví dụ 1: Trong đĩa hoa quả có táo, cam, lê, mỗi loại có ít nhất 4 quả. tính số cách lấy **4 quả** từ đĩa này nếu thứ tự các quả được chọn không quan trọng.

Ví dụ 2: Phương trình $x_1+x_2+x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu cách đặt 10 viên bi giống hệt nhau vào tám ngăn phân biệt?

- Trong bài toán đếm, một số phần tử có thể **giống hệt nhau**, không phân biệt → Tránh đếm chúng hơn 1 lần

Ví dụ:

- Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS?

Định lí 3:

Số **các hoán vị khác nhau** của *n* phần tử, trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2,... n_k phần tử như nhau thuộc loại *k*, bằng:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

SỰ PHÂN PHỐI CÁC VẬT VÀO TRONG CÁC HỘP

Định lí 4:

Số cách phân phối ***n* vật khác nhau** vào ***k* hộp khác nhau** sao cho có n_i vật được đặt vào hộp thứ *i*, với *i*= 1, 2, ..., *k*, bằng:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

Ví dụ:

- Có bao nhiêu cách chia một cỗ bài chuẩn 52 quân thành những tay bài gồm 5 quân cho bốn người chơi.

BÀI TẬP

- **Bài 7**: Có bao nhiêu cách chọn 12 chiếc bánh từ một cửa hàng có 21 loại bánh khác nhau

- **Bài 8**: Có bao nhiêu cách phân phối 12 viên bi giống hệt nhau vào sáu ngăn phân biệt.

- **Bài 9**: Có bao nhiêu cách phân phối 12 vật khác nhau vào 6 ngăn phân biệt, mỗi ngăn 2 vật.

4.6 SINH CÁC HOÁN VỊ VÀ TỔ HỢP

SINH CÁC HOÁN VỊ

- Mọi tập n phần tử đều có thể đặt tương ứng 1-1 với tập $\{1, 2,..., n\}$
- Sinh hoán vị của tập n phần tử bằng cách sinh hoán vị tập n số nguyên dương
- Hoán vị $a_1a_2...a_n$ được gọi là **đi trước hoán vị** $b_1b_2...b_n$ nếu với k nào đó ($1 \le k \le n$), $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, ..., a_{k-1} = b_{k-1}$ và $a_k < b_k$
- Thuật toán sinh các hoán vị $\{1, 2,..., n\}$ dựa trên thủ tục xây dựng hoán vị kế tiếp, theo thứ tự từ điển, của hoán vị cho trước $a_1a_2...a_n$

SINH CÁC HOÁN VỊ

1 2 3 4 5

1 2 3 5 4

1 2 4 3 5

1 2 4 5 3

1 2 5 3 4

1 2 5 4 3

1 3 2 4 5

1 3 2 5 4

1 3 4 2 5

1 3 4 5 2

1 3 5 2 4

1 3 5 4 2

……

Thuật toán sinh hoán vị kế tiếp:

- Tìm a_j và a_{j+1} sao cho:

  - $a_j < a_{j+1}$

  - $a_{j+1} > a_{j+2} > \ldots > a_n$

- Đặt vào vị trí *j* số nguyên nhỏ nhất trong các số lớn hơn a_j của tập $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$

- Liệt kê theo thứ tự tăng dần các số còn lại của $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$ vào các vị trí $j+1,\ldots,n$.

Ví dụ:

- Tìm hoán vị lớn nhất đứng sau thứ tự từ điển của hoán vị **362541**

Giải:

- Cặp số đầu tiên từ phải sang trái có số trước nhỏ hơn số sau là **2** và **5**:

  - **2**< **5**

  - **5** >**4** > **1**
- Đặt vào vị trí *3* số nguyên nhỏ nhất **4** trong các số lớn hơn ***2*** của tập ***5, 4, 1***
- Liệt kê theo thứ tự tăng dần các số còn lại của ***1,2,5***
- Kết quả ta được: **364125**

THUẬT TOÁN 1 : Sinh hoán vị liền sau một hoán vị cho trước

Procedure *Hoán vị liền sau* ($a_1a_2...a_n$: hoán vị của {1, 2,...n} khác n(n-1)...21

$j := n$-1

while $a_j > a_{j+1}$

 $j := j$ -1

{j là chỉ số lớn nhất mà $a_j > a_{j+1}$}

k := n

while $a_j > a_k$

 $k := k$ -1

{a_k là số nguyên nhỏ nhất trong các số lớn hơn a_j *nằm bên phải* a_j}

$r := n$; $s := j$+1 // đổi chỗ a_j và a_k

while $r > s$

begin

  $r := r$-1; $s := s$+1

end

{Xếp phần đuôi của hoán vị ở sau vị trí thứ j theo thứ tự tăng dần}

- Tổ hợp của tập A={a_1, a_2,..., a_n} chính là một tập con của tập ban đầu
- Mỗi tập con tương ứng với một-một với xâu nhị phân độ dài *n*
- Bài toán **sinh tổ hợp** của tập A tương ứng với **liệt kê các xâu nhị phân** độ dài *n*

Thuật toán sinh xâu nhị phân lớn nhất liền sau:

- Xác định vị trí đầu tiên từ bên phải là bit 0
- Thay giá trị bít tại vị trí đó bằng 1
- Thay tất cả vị trí bên phải nó bằng 0

Ví dụ:

- Tìm xâu nhị phân lớn nhất liền sau của **1000100111**

Giải:

- Vị trí từ phải sang mang giá trị 0 là 4
- Thay giá trị tại vị trí 4 thành 1: **1000101111**
- Các vị trí bên phải thành 0: **1000101000**

THUẬT TOÁN 2 : **Sinh xâu nhị phân lớn nhất liền sau**

Procedure *Xâu nhị phân liền sau* ($b_{n-1}b_{n-2}...b_1\ b_0$: xâu nhị phân khác 11..11)

i := 0

while b_i =1

begin

  b_i :=0

  i := i+1

end

b_i :=1

SINH TỔ HỢP CHẬP *r*

- Tổ hợp chập r từ n phần tử $\{1, 2,..., n\}$ biểu diễn bằng một dãy chứa các phần tử trong tập con theo thứ tự tăng dần

- Sinh các tổ hợp chập r chính là liệt kê các tổ hợp chập r theo thứ tự từ điển.

Thuật toán sinh tổ hợp chập r liền sau tổ hợp $a_1a_2...a_r$:

- Tìm phần tử đầu tiên a_i trong dãy đã kể từ phải sang trái sao cho:

$$a_i \neq n - r + 1$$

- Thay a_i bằng a_{i+1} và a_j bằng $a_i + 1 + j - i$, với $j = i + 1, i + 2..., r$

Ví dụ 1:

- Tìm tổ hợp chập 4 lớn nhất từ tập {1, 2, 3, 4, 5, 6} đi liền sau tổ hợp {1, 2, 3, 4}

Giải:

- Ta có $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$
- $(a_4 = 4) \neq (6 - 4 + 4)$
- Thay a_4 bằng $a_{4+1} = 5$
- Ta được tổ hợp mới **{1, 2, 3, 5}**

Ví dụ 2:

- Tìm tổ hợp chập 4 lớn nhất từ tập {1, 2, 3, 4, 5, 6} đi liền sau tổ hợp {1, 2, 5, 6}

THUẬT TOÁN 3: Sinh xâu nhị phân lớn nhất liền sau

Procedure *Tổ hợp liền sau* ({$a_1 a_2 \ldots a_n$}:tập con thực sự của tập {1,2,...,n} với $a_1 < a_2 \ldots < a_n$)

$i := r$

while $a_i = n - r + i$

    $i := i - 1$

$a_i := a_j + 1$

for $j := i + 1$ **to** r

$a_j := a_i + j - i$

BÀI TẬP

- **Bài 10**: Dùng thuật toán 1 hãy tạo ra **24 hoán vị** của **bốn số nguyên dương đầu tiên** theo thứ tự từ điển

- **Bài 11**: Dùng thuật toán 2 hãy liệt **kê tất cả các tập con** của tập **{1, 2, 3, 4}**

- **Bài 12**: Dùng thuật toán 3 hãy liệt kê tất cả **các tổ hợp chập 3** của **{1, 2, 3, 4, 5}**