BÀI 5

KỸ THUẬT ĐẾM CAO CẤP

Vũ Thương Huyền
huyenvt@tlu.edu.vn

NỘI DUNG

- **Hệ thức truy hồi**
- **Giải các hệ thức truy hồi**
- **Nguyên lý bù trừ**

6.1 HỆ THỨC TRUY HỒI

CÁC HỆ THỨC TRUY HỒI

- Một số bài toán đếm không thể giải được bằng kĩ thuật đếm thông thường

- Có thể giải bằng cách tìm mối quan hệ, gọi là **các hệ thức truy hồi**

Định nghĩa 1:

Hệ thức truy hồi đối với dãy số $\{a_n\}$ là ***phương trình biểu diễn a_n*** qua một hay nhiều số hạng đứng trước nó, cụ thể là a_0, a_1, ..., a_{n-1} với mọi số nguyên $n \geq n_0$,trong đó n_0 là một số nguyên không âm.

Dãy số được gọi là *lời giải* hay là ***nghiệm*** của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

CÁC HỆ THỨC TRUY HỒI

<u>Ví dụ 1</u>: Cho $\{a_n\}$ là dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ với n = 2, 3, 4,... và giả sử $a_0 = 3$, $a_1 = 5$. Tìm a_2, a_3.

<u>Ví dụ 2</u>: Hãy xác định xem dãy $\{a_n\}$ trong đó $\boldsymbol{a_n = 3n}$ với mọi n nguyên không âm có phải là lời giải của hệ thức truy hồi $\boldsymbol{a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}}$ với n = 2, 3, 4... hay không?

Cũng câu hỏi như vậy đối với $\boldsymbol{a_n = 2^n}$ và $\boldsymbol{a_n = 5}$

Ví dụ 1:

Lãi kép. Giả sử một người gửi 10.000$ vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Hỏi sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?

Giải:

- Gọi P_n là tổng số tiền có trong tài khoản sau *n* năm

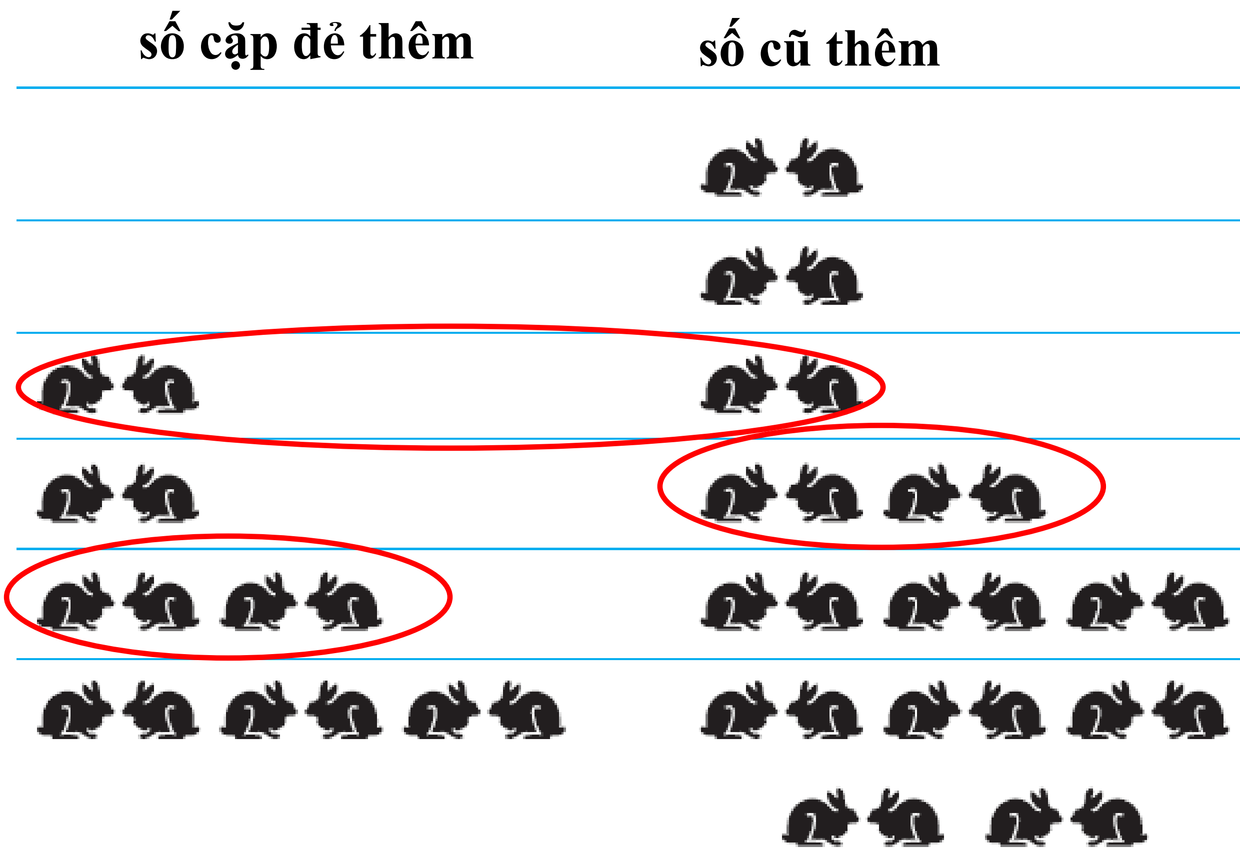
$$\mathbf{P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1,11P_{n-1}}$$

- Như vậy:
  - $P_1 = 1,11P_0$
  - $P_2 = 1,11P_1 = (1,11)^2 P_0$
  - ...
  - $P_n = 1,11P_{n-1} = (1,11)^n P_0$
  - Thay $n = 30$ vào công thức $P_{30} = (1,11)^{30} . 10000 = 228\ 923\$$

Ví dụ 2:

Họ nhà thỏ và các số Fibonacci. Mỗi cặp thỏ mới sinh được thả trên một hòn đảo. Giả sử rằng một cặp thỏ chưa sinh sản được trước khi đầy 2 tháng tuổi. Kể từ khi chúng đầy 2 tháng tuổi, mỗi tháng chúng đẻ được một đôi thỏ con. **Tìm công thức truy hồi tính số cặp thỏ trên đảo sau *n* tháng** với giả sử các con thỏ là trường thọ.

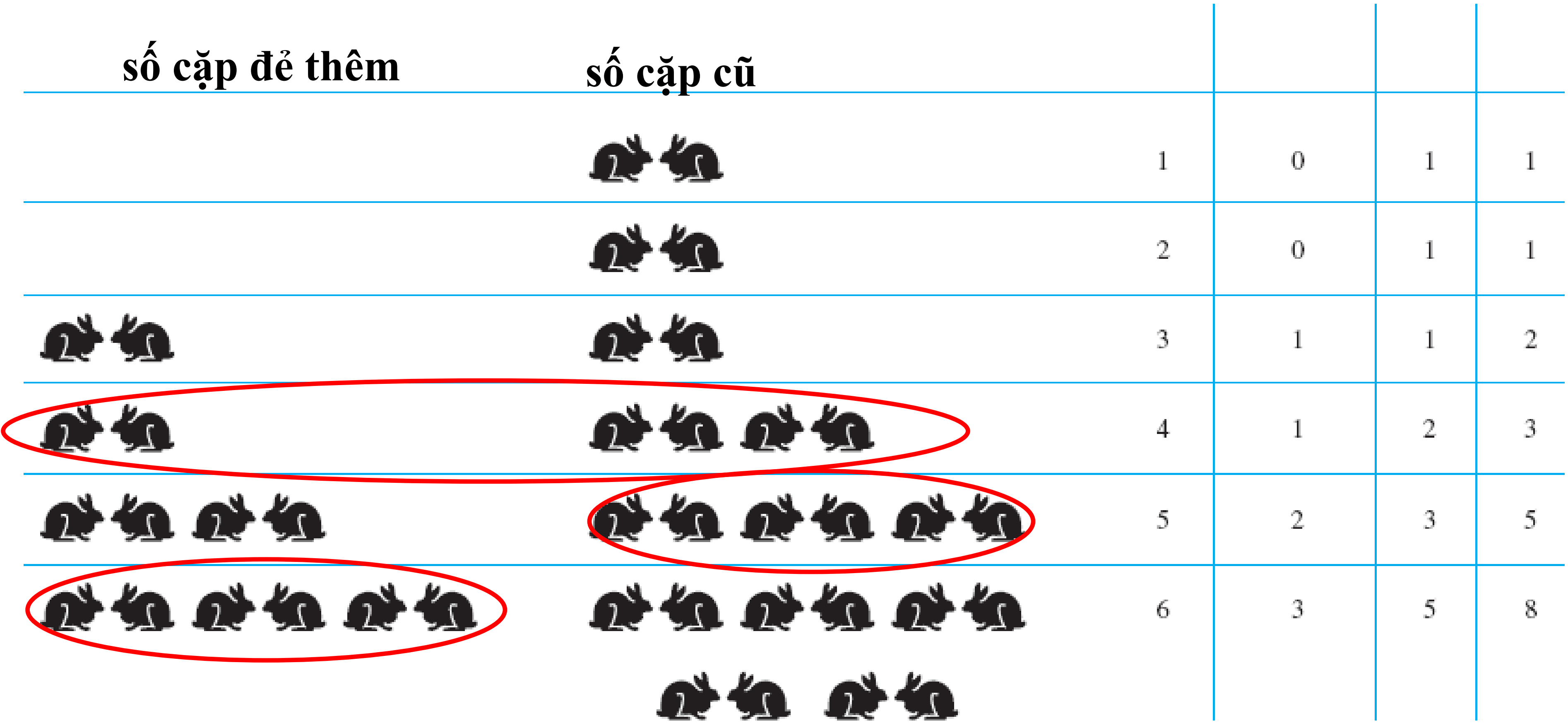
Số cặp thỏ trên đảo



1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8

Số cặp thỏ trên đảo

Số cặp thỏ trên đảo



Số cặp thỏ trên đảo

số cặp đẻ thêm   số cặp cũ

1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8

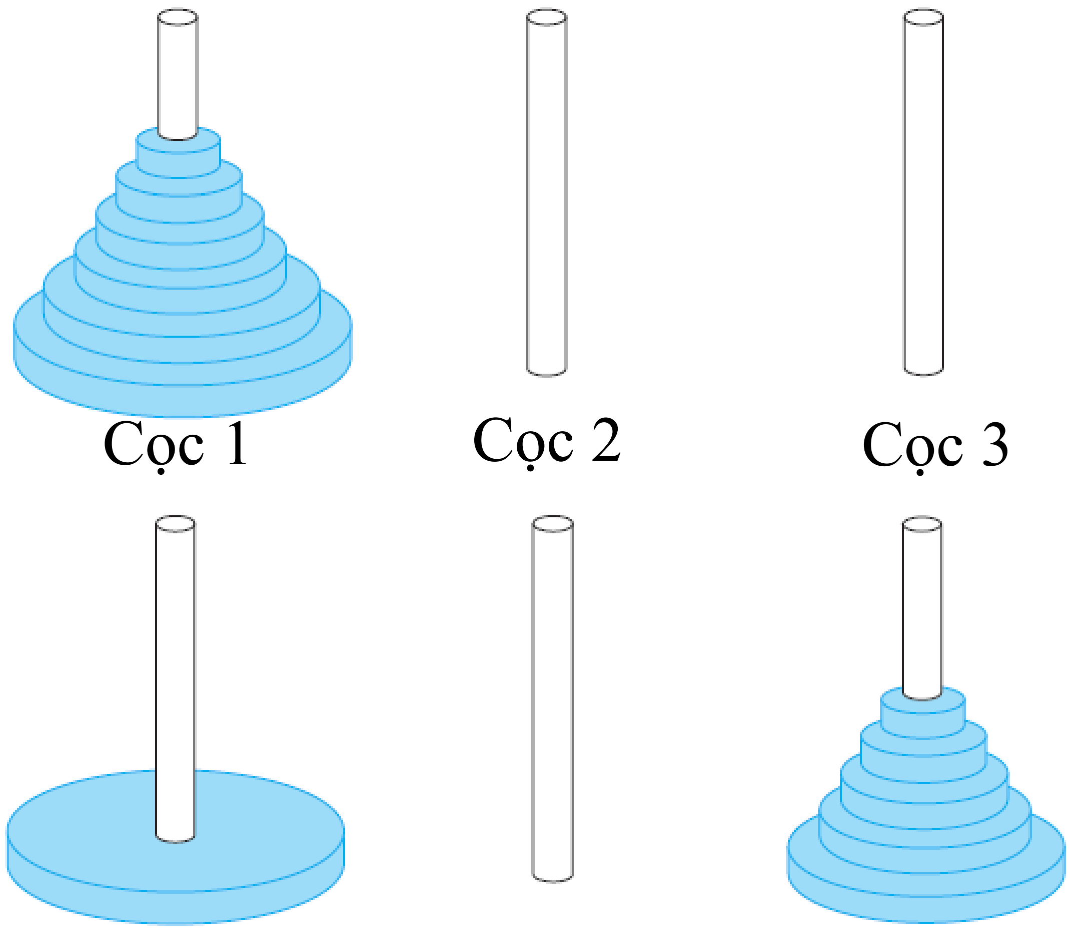
Giải:

- Giả sử f_n là số cặp thỏ sau *n* tháng, với *n* = 1, 2, 3,...
- Tháng 1 số cặp thỏ trên đảo là $f_1 = 1$
- Tháng 2 số cặp thỏ trên đảo là $f_2 = 1$
- Tháng 3 số cặp thỏ $f_3 = 1 + 1 = f_1 + f_2$
- Tháng 4 số cặp thỏ $f_4 = 1 + 2 = f_2 + f_3$
- Tháng *n* số cặp thỏ trên đảo là $\boldsymbol{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}}$, f_{n-1} số cặp thỏ tháng trước, f_{n-2} số cặp thỏ mới đẻ

MÔ HÌNH HÓA BẰNG CÁC HỆ THỨC TRUY HỒI

Ví dụ 3:

Tháp Hà Nội. Do Édouard Lucas đưa ra cuối thế kỉ XIX.



Giải:

- Gọi H_n là số bước dịch chuyển để giải câu đố tháp Hà Nội với n đĩa
- Dịch chuyển ***n*-1** đĩa từ cọc 1 sang cọc 3, phải dùng $\boldsymbol{H_{n-1}}$ lần
- Dịch chuyển đĩa ***n*** từ cọc 1 sang cọc 2
- Cuối cùng, mất $\boldsymbol{H_{n-1}}$ lần để dịch chuyển ***n*-1** đĩa từ cọc 3 sang cọc 2
- Ta có hệ thức truy hồi:

$$\boldsymbol{H_n = 2.H_{n-1} + 1, \text{ với } H_1 = 1}$$

- $H_n = 2.H_{n-1} + 1 = 2.(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1$

$$= 2^2(2.H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$$

$$\dots \quad = 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1$$

$$= 2^n - 1$$

Ví dụ 4:

Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài *n* không chứa 2 bít 0 liên tiếp?

Giải:

- Gọi a_n là số xâu độ dài ***n*** và không có 2 bít 0 liên tiếp
- Chính bằng số xâu độ dài ***n*-1** ghép thêm 1 vào cuối (a_{n-1})
- Cộng với số xâu độ dài ***n-2*** ghép thêm 10 vào cuối (a_{n-2})
- do đó:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ với } n \geq 3,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3$$

BÀI TẬP

- **Bài 1**: Giả sử $\boldsymbol{a_n = 2^n + 5.3^n}$, với $n = 0, 1, 2, ...$

  a) Tìm a_1, a_2, a_3 và a_4

  b) CM: $a_2 = 5a_1 - 6a_0$, $a_3 = 5a_2 - 6a_1$ và $a_4 = 5a_3 - 6a_2$

  c) CMR: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ với mọi số nguyên $n \geq 2$

- **Bài 2**: Chứng tỏ rằng dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9}$ nếu:

  a) $a_n = -n + 2$

  b) $a_n = 5(-1)^n - n + 2$

BÀI TẬP

- **Bài 3**: Một nhân viên bắt đầu làm việc tại một công ti từ năm 1999 với lương khởi điểm là 50 000 đô la một năm. Hằng năm anh ta được nhận thêm 1000 đô la và 5% lương của năm trước.

a) Hãy thiết lập hệ thức truy hồi tính lương của nhân viên đó sau năm 1999 ***n*** *năm.*

b)Lương năm 2007 của anh ta là bao nhiêu?

c)Hãy tìm công thức tường minh tính lương của nhân viên này sau năm 1999 ***n*** *năm*

6.2 GIẢI CÁC HỆ THỨC TRUY HỒI

Định nghĩa 1:

Một ***hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k*** với hệ số hằng số là hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

trong đó: c_1 , c_2 , c_k là các số thực và $c_k \neq 0$

- Là ***tuyến tính*** vì vế phải là tổng các tích của các số hạng trước của dãy
- Là ***thuần nhất*** vì mọi số hạng đều có dạng a_j nhân với hệ số
- **Bậc *k*** là vì a_n được biểu diễn qua *k* số hạng đứng trước

HỆ THỨC TRUY HỒI TUYẾN TÍNH

Ví dụ:

- Hệ thức truy hồi $P_n = (1.11)P_{n-1}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc nhất

- Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + (a_{n-1})^2$ không là tuyến tính

- Hệ thức truy hồi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ không là thuần nhất

- Hệ thức truy hồi $B_n = nB_{n-1}$ không có hệ số hằng

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI TUYẾN TÍNH

Phương pháp cơ bản:

- Tìm nghiệm dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số
- $\boldsymbol{a_n = r^n}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi :

  $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} +\ldots +c_ka_{n-k}$ nếu và chỉ nếu

  $\boldsymbol{r^n = c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} +\ldots +c_kr^{n-k}}$
- Tương đương phương trình:

  $\boldsymbol{r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \ldots +c_{k-1}r - c_k = 0}$ **(1)**

- $\boldsymbol{a_n = r^n}$ là nghiệm nếu và chỉ nếu r là nghiệm phương trình (1)
- Phương trình (1) gọi là **phương trình đặc trưng**
- Nghiệm của phương trình (1) gọi là **nghiệm đặc trưng** của hệ thức truy hồi

GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI TUYẾN TÍNH

Định lí 1:

Cho c_1 , c_2 là hai số thực. Giả sử $\boldsymbol{r^2 - c_1 r - c_2 = 0}$ có hai nghiệm phân biệt là $\boldsymbol{r_1, r_2}$. Khi đó $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $\boldsymbol{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n}$,với $n = 0$, 1, 2,... trong đó α_1, α_2 là các hằng số.

Ví dụ: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ với } a_0 = 2,\ a_1 = 7$$

Định lí 2:

Cho c_1 , c_2 là hai số thực, với c2 ≠ 0. Giả sử $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ chỉ có một nghiệm r_0 . Khi đó $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$,với n = 0, 1, 2 ,... trong đó α_1, α_2 là các hằng số.

Ví dụ: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \text{ với } a_0 = 1,\ a_1 = 6$$

Định lí 3:

Cho c_1 , c_2 ,..., c_k là các số thực. Giả sử rằng phương trình đặc trưng

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$$

có k nghiệm phân biệt r_1, r_2, ..., r_k. Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_k a_{n-k}$$

nếu và chỉ nếu

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n,$$

với $n = 0, 1, 2$,... trong đó α_1, α_2 ,..., α_k là các hằng số.

Ví dụ: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \text{ với } a_0 = 2,\ a_1 = 5,\ a_2 = 15$$

BÀI TẬP

- **Bài 3**: Trong các hệ thức truy hồi sau đây, hệ thức nào là tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số. Bậc của các hệ thức đó là bao nhiêu?

  a) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3}$

  b) $a_n = 2na_{n-1} + a_{n-2}$

  c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$

  d) $a_n = a_{n-1} + 2$

  e) $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}$

- **Bài 4**: Giải các hệ thức truy hồi cùng các điều kiện đầu sau:

  a) $a_n = 2a_{n-1}$, với $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$

  b) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, với $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

  c) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, với $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$

6.5 NGUYÊN LÍ BÙ TRỪ

NGUYÊN LÍ BÙ TRỪ

- Có bao nhiêu phần tử trong hợp của hai tập hợp hữu hạn phần tử?

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ví dụ 1:

Lớp toán rời rạc có 25 sinh viên chuyên ngành tin học, 13 sinh viên chuyên ngành toán và tám sinh viên theo học cả ngành toán lẫn tin học. ***Hỏi trong lớp này có bao nhiêu sinh viên***, nếu mỗi sinh viên theo ngành toán hoặc ngành tin hoặc theo học cả toán và tin?

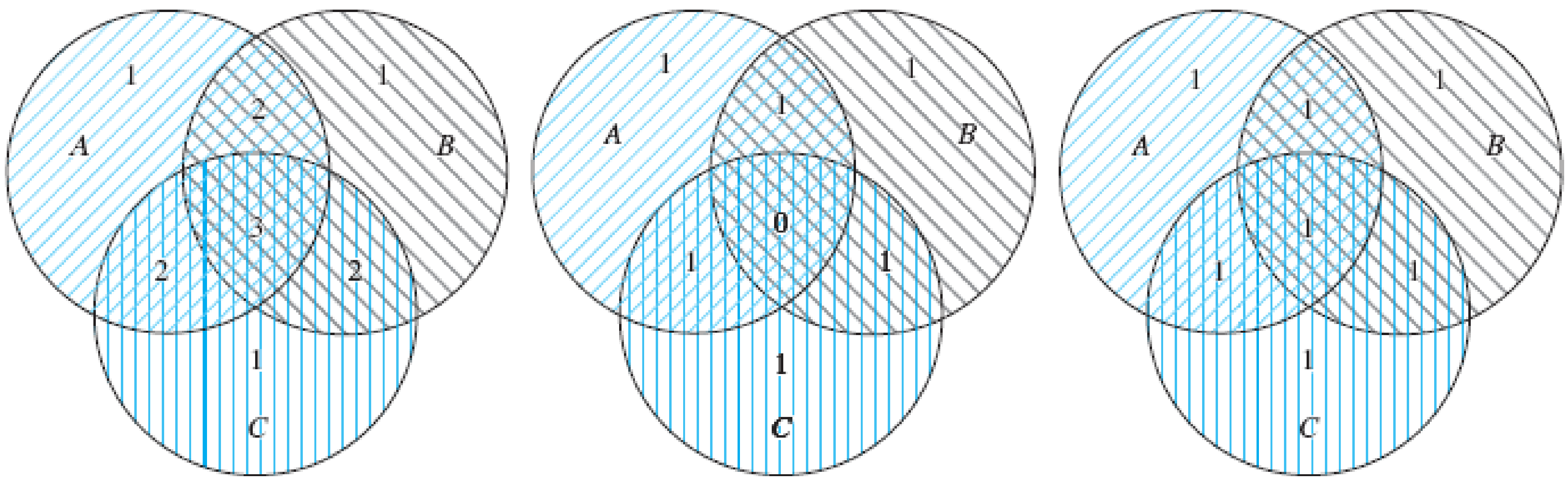
Ví dụ 2:

Giả sử trong trường có 1807 sinh viên năm thứ nhất. Trong số này có 453 người chọn môn tin học, 547 người chọn môn toán và 299 người học cả hai môn toán và tin. ***Hỏi có bao nhiêu sinh viên không theo học toán cũng không học tin?***

NGUYÊN LÍ BÙ TRỪ

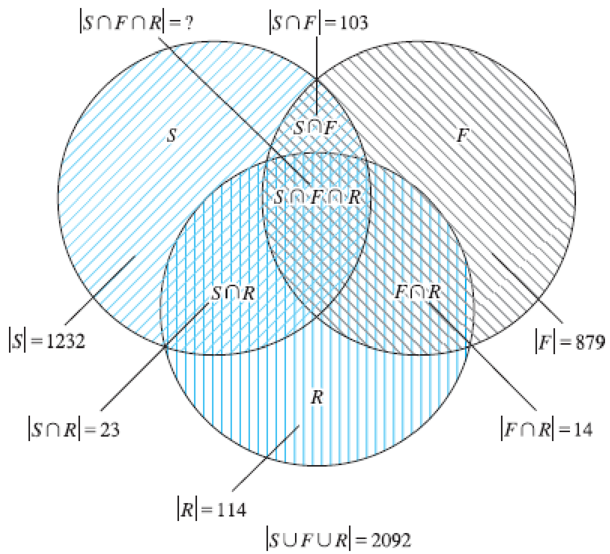
- **Trường hợp 3 tập hợp:**

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |C \cap B| + |A \cap B \cap C|$$



Ví dụ 1:

Biết rằng có 1232 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha, 879 sinh viên học tiếng Pháp và 114 sinh viên học tiếng Nga. Ngoài ra còn biết rằng 103 sinh viên học cả tiếng Tây Ban Nha và tiếng Pháp, 23 sinh viên học cả tiếng Tây Ban Nha và tiếng Nga, 14 sinh viên học cả tiếng Pháp và tiếng Nga. Nếu tất cả 2092 sinh viên đều theo học ít nhất một ngoại ngữ, thì ***có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng***?



Định lí 1:

NGUYÊN LÍ BÙ TRỪ. Cho A_1 , A_2,A_3 là các tập hữu hạn. Khi đó:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

Ví dụ:

Có bao nhiêu phần tử trong hợp của bốn tập hợp, nếu mỗi tập có 100 phần tử, mỗi cặp tập hợp có chung 50 phần tử, mỗi bộ ba tập hợp có 25 phần tử chung và có năm phần tử thuộc cả 4 tập hợp.

DẠNG KHÁC CỦA NGUYÊN LÍ BÙ TRỪ

- Giả sử A_i là tập con chứa các phần tử có tính chất P_i , kí hiệu $\boldsymbol{N(P_1P_2...P_n)}$

$$|\mathbf{A_1} \cap \mathbf{A_2} \cap ... \cap \mathbf{A_n}| = \boldsymbol{N(P_1P_2...P_k)}$$

- Nếu số các phần tử không có tính chất nào trong số n tính chất $P_1P_2...P_n$ được kí hiệu $\boldsymbol{N(P_1'P_2'...P_n')}$

$$\boldsymbol{N(P_1'P_2'...P_k')} = N - |\mathbf{A_1} \cup \mathbf{A_2} \cup ... \cup \mathbf{A_n}|$$

Ví dụ 1:

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm, trong đó x_1, x_2, x_3 *là các số nguyên không âm với* $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$ và $x_3 \leq 6$.

Ví dụ 2:

Tìm số các số nguyên tố không vượt quá 100?

<u>Ví dụ 3</u>:

Có bao nhiêu hàm toàn ánh từ tập có 6 phần tử đến tập có 3 phần tử?

BÀI TẬP

- **Bài 5**: Giả sử trong một sọt táo chứa 100 quả có 20 quả bị sâu và 15 quả bị giập nát. Chỉ những quả táo không có sâu hoặc không giập nát mới có thể bán được. Hỏi nếu có 10 quả táo vừa bị sâu vừa bị giập nát thì có bao nhiêu quả táo trong sọt có thể bán?