BÀI 6

ĐỒ THỊ

Vũ Thương Huyền
huyenvt@tlu.edu.vn

NỘI DUNG

- Các định nghĩa
- Các thuật ngữ về đồ thị
- Biểu diễn đồ thị
- Tính liên thông
- Đường đi Euler và đường đi Hamilton
- Bài toán đường đi ngắn nhất

8.1 CÁC ĐỊNH NGHĨA

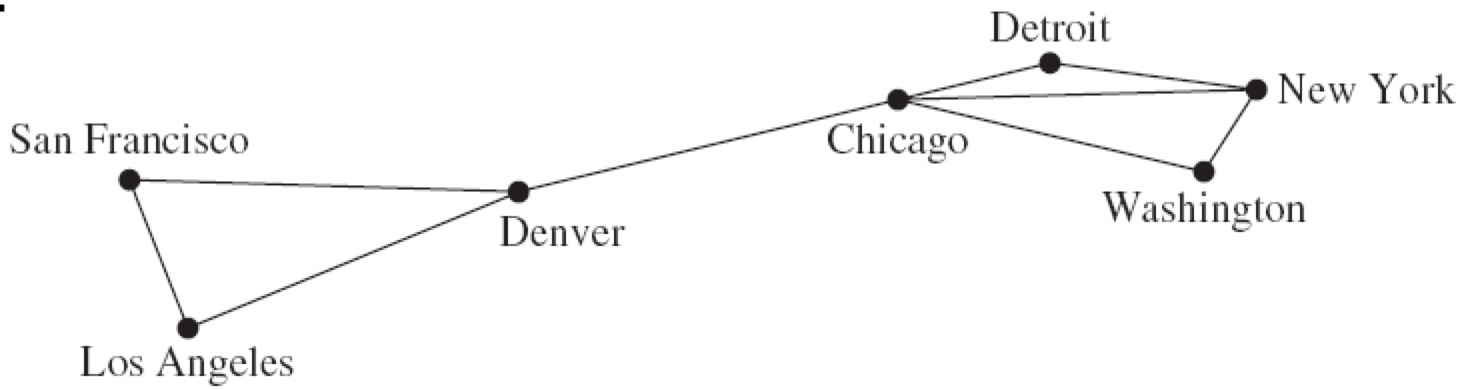
ĐỒ THỊ

- **Đồ thị** là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh nối đỉnh
- Dùng đồ thị cho các lĩnh vực khác nhau:
  - ✓ Biểu diễn sự cạnh tranh các loài trong một môi trường sinh thái
  - ✓ Biểu diễn sự ảnh hưởng của một ai đó trong tổ chức
  - ✓ Biểu diễn kết quả cuộc thi thể thao
  - ✓ Mạng hàng không

Định nghĩa 1:

Một ***đơn đồ thị*** *G* = (*V*, *E*) gồm một tập không rỗng *V* mà các phần tử của nó gọi là các *đỉnh* và một tập *E* mà các phần tử của nó gọi là các *cạnh* là các cặp không sắp thứ tự của các đỉnh phân biệt.

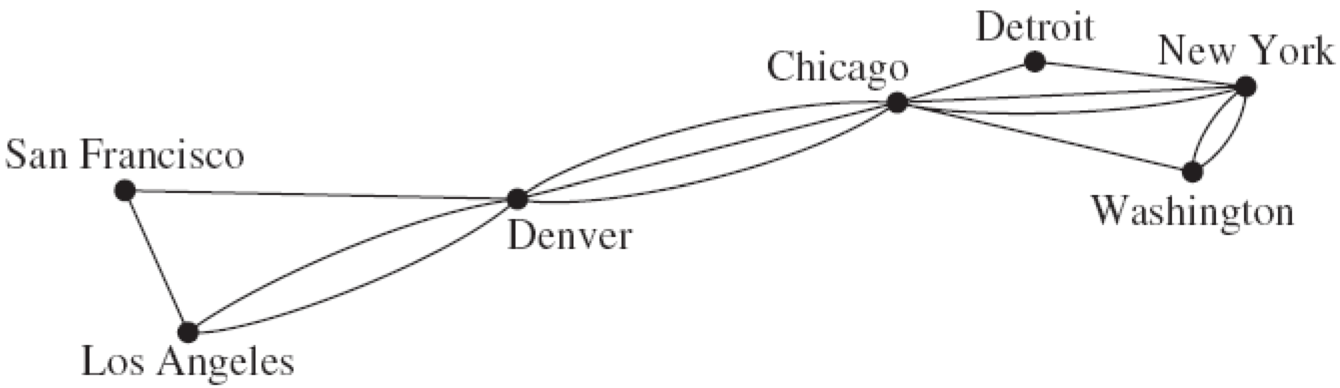
Ví dụ:



Định nghĩa 2:

Một ***đa đồ thị*** $G = (V, E)$ gồm một tập các đỉnh V, một tập các cạnh E và một hàm f từ E tới $\{(u,v) |\ u,v \in V\ ,\ u \neq v\}$. Các cạnh e_1 và e_2 được gọi là *cạnh song song* hay *cạnh bội* nếu $f(e_1) = f(e_2)$.

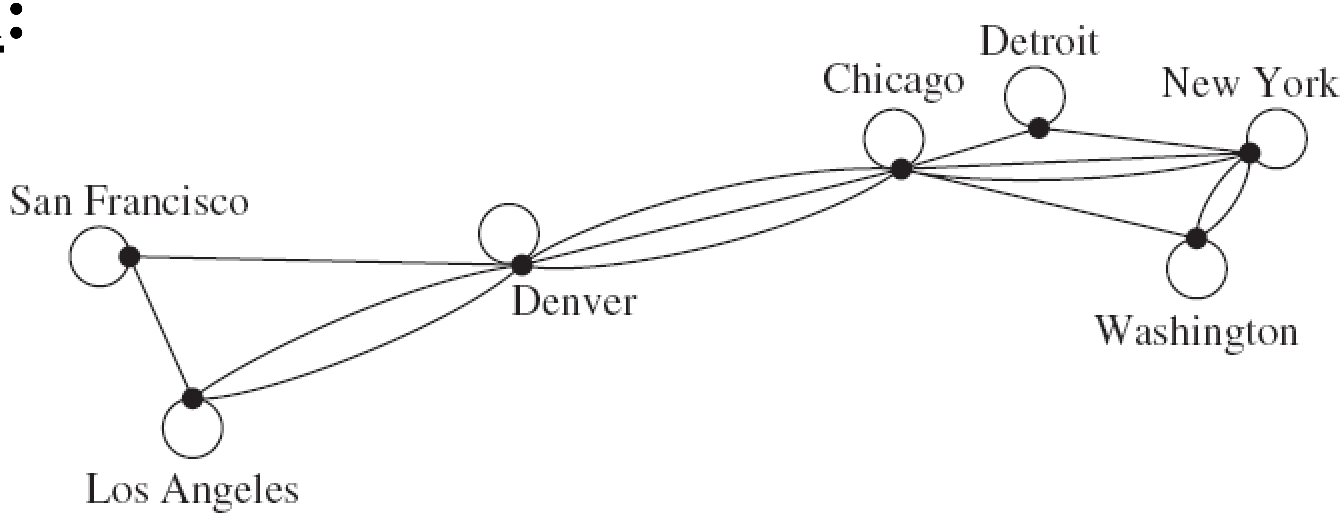
Ví dụ:



Định nghĩa 3:

Một ***giả đồ thị*** $G = (V, E)$ gồm một tập các đỉnh V, một tập các cạnh E và một hàm f từ E tới $\{\{u,v\} \mid u,v \in V\}$. Một cạnh là *khuyên* nếu $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$ với một đỉnh u nào đó

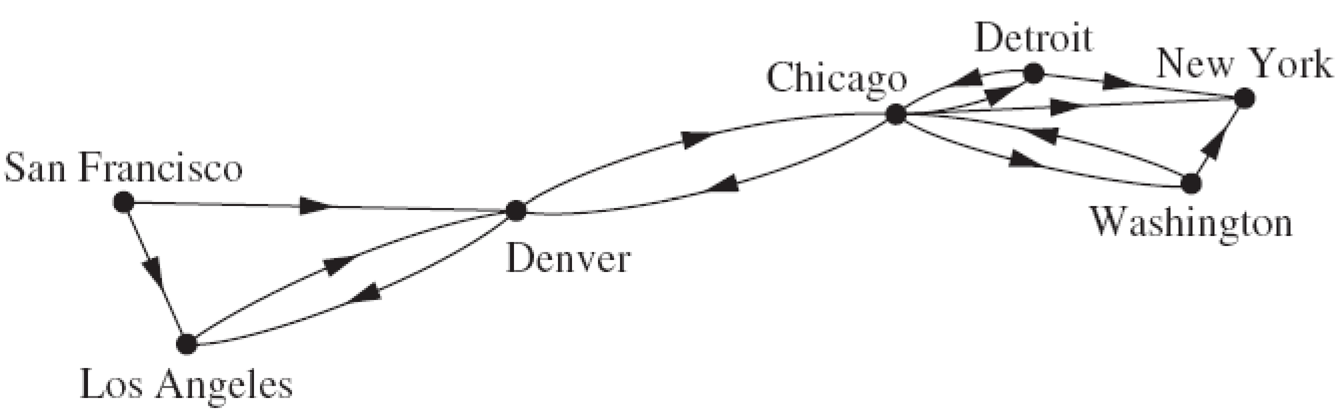
Ví dụ:



Định nghĩa 4:

Một ***đồ thị có hướng*** *G* = (*V*, *E*) gồm một tập các đỉnh *V*, một tập các cạnh *E* là các cặp có thứ tự của các phần tử thuộc *V*.

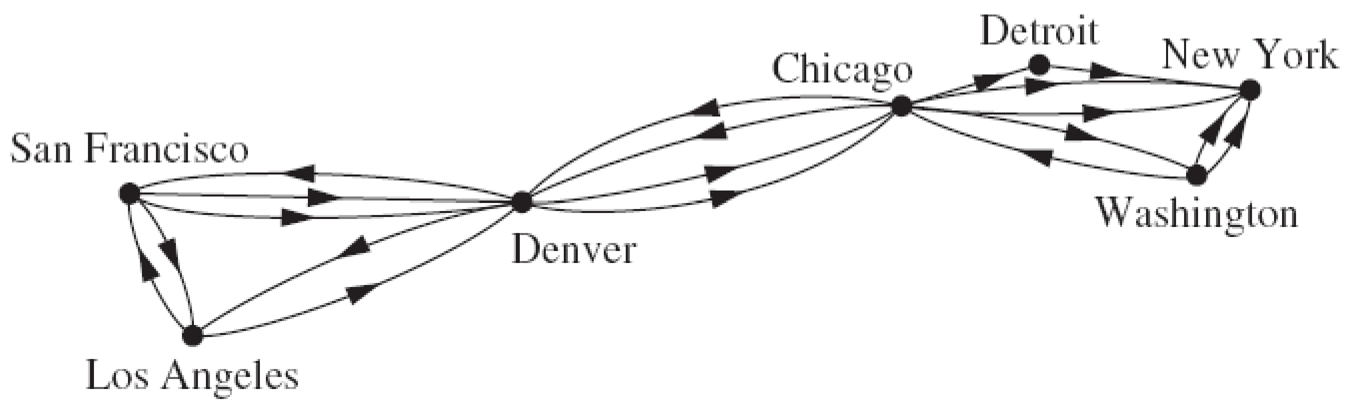
Ví dụ:



Định nghĩa 5:

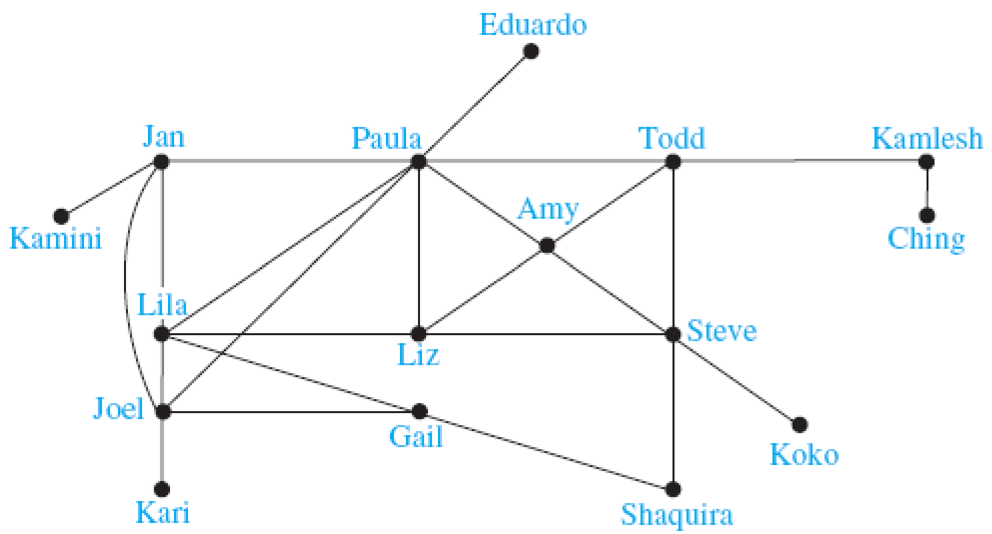
Một ***đa đồ thị có hướng*** $G = (V, E)$ gồm một tập các đỉnh V, một tập các cạnh E và một hàm f từ E tới $\{(u,v) \mid u, v \in V\}$. Cạnh e_1 và e_2 là các cạnh bội nếu $f(e_1) = f(e_2)$.

Ví dụ:

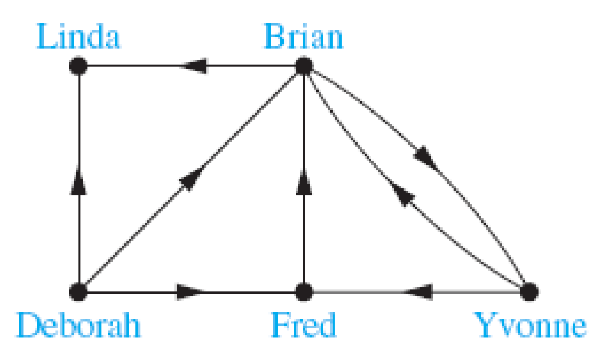


CÁC MÔ HÌNH ĐỒ THỊ

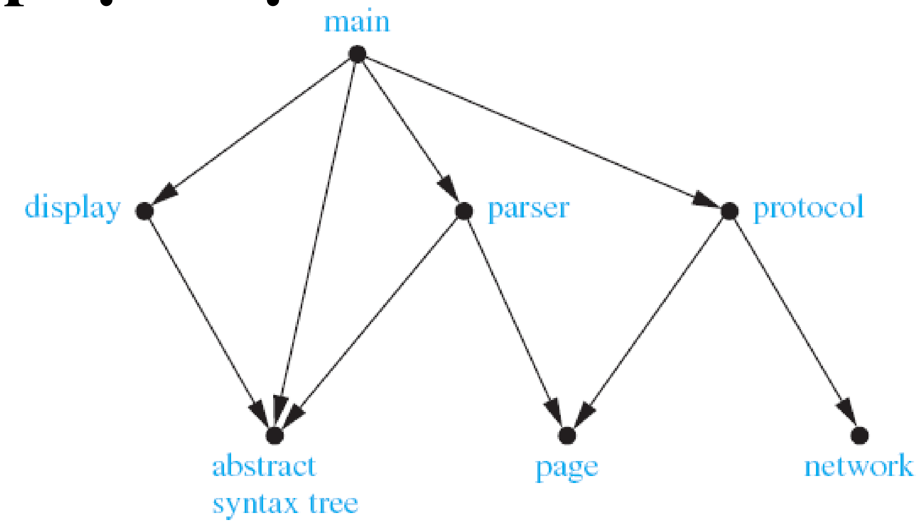
<u>Ví dụ 1</u>: Mạng xã hội



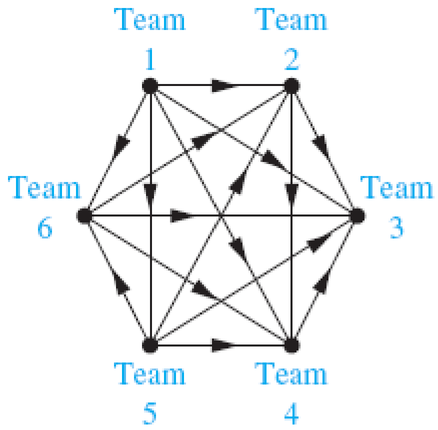
<u>Ví dụ 2</u>: Đồ thị ảnh hưởng

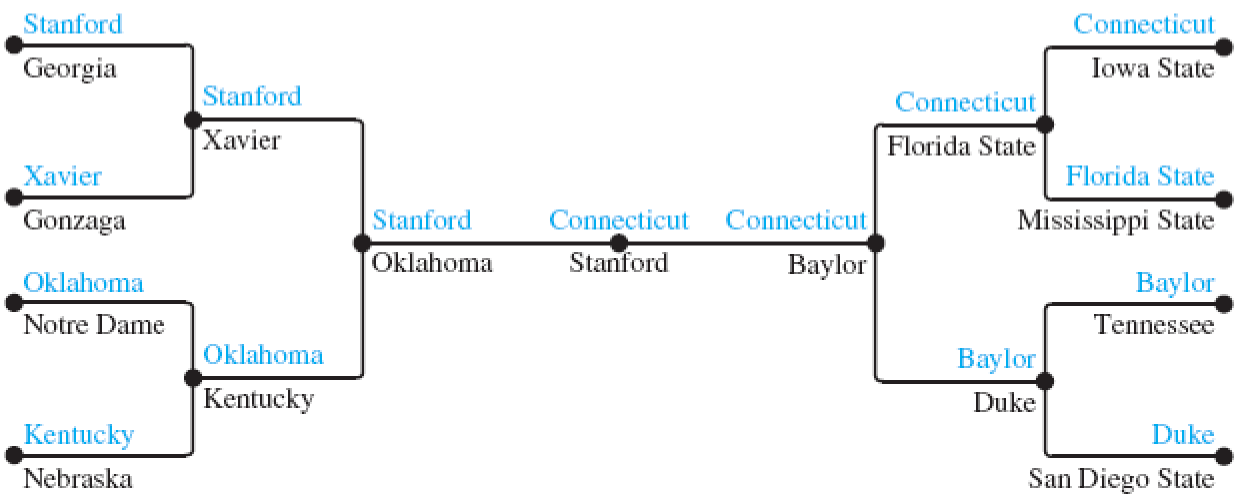


Ví dụ 3: Đồ thị các môđun phụ thuộc



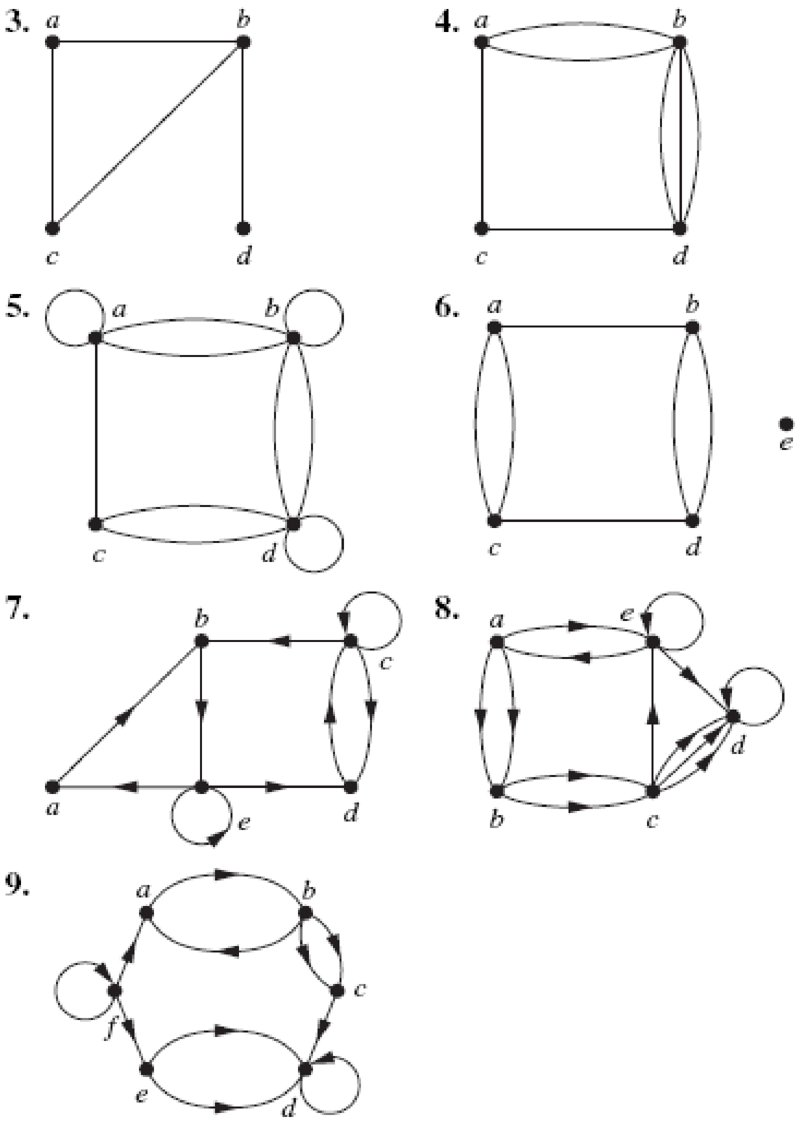
Ví dụ 4: Đồ thị thi đấu





BÀI TẬP

- **Bài 1**: Xác định các loại đồ thị cho hình bên



8.2 CÁC THUẬT NGỮ VỀ ĐỒ THỊ

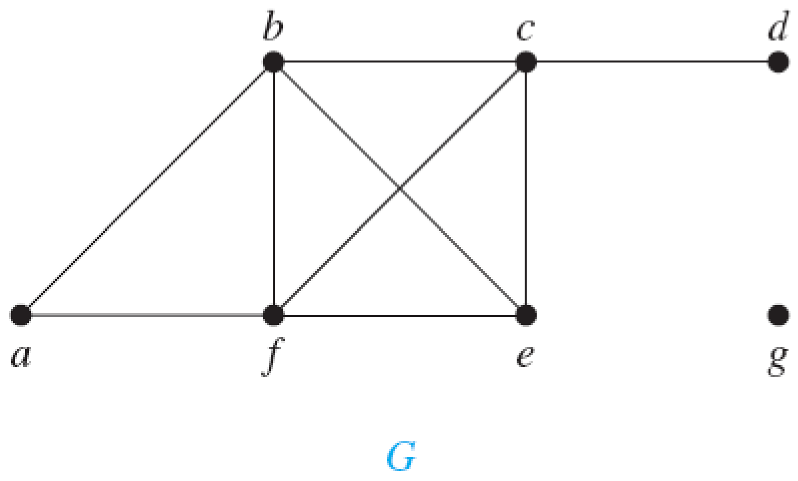
Định nghĩa 1:

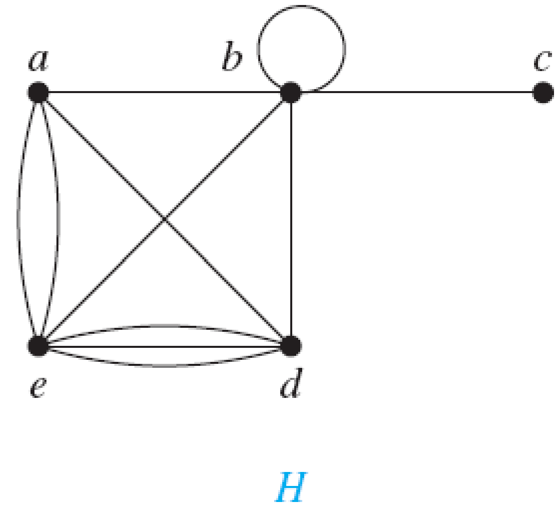
Hai đỉnh *u* và *v* trong một ***đồ thị vô hướng*** *G* được gọi là **liền kề** (hay *láng giềng*) nếu {*u*, *v*} là một cạnh của *G*. Nếu *e* = {*u*, *v*} thì *e* gọi là *cạnh liên thuộc* hoặc ***cạnh nối*** với các đỉnh *u* và *v*. Các đỉnh *u* và *v* gọi là các ***điểm đầu mút*** của cạnh {*u*, *v*}.

Định nghĩa 2:

Bậc của một đỉnh trong đồ thị vô hướng là số các cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó. Người ta kí hiệu bậc của đỉnh là **deg(*v*)**

<u>Ví dụ</u>: Bậc của các đỉnh trong các đồ thị sau là bao nhiêu?





- **Đỉnh bậc 0** gọi là ***đỉnh cô lập***
- **Đỉnh bậc 1** gọi là ***đỉnh treo***

Định lí 1:

ĐỊNH LÍ BẮT TAY. Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có e cạnh. Khi đó:

$$\mathbf{2}\boldsymbol{e} = \sum_{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{V}} \boldsymbol{deg}(\boldsymbol{V})$$

Định lí 2:

Một đồ thị ***vô hướng*** có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ

CÁC THUẬT NGỮ CƠ SỞ

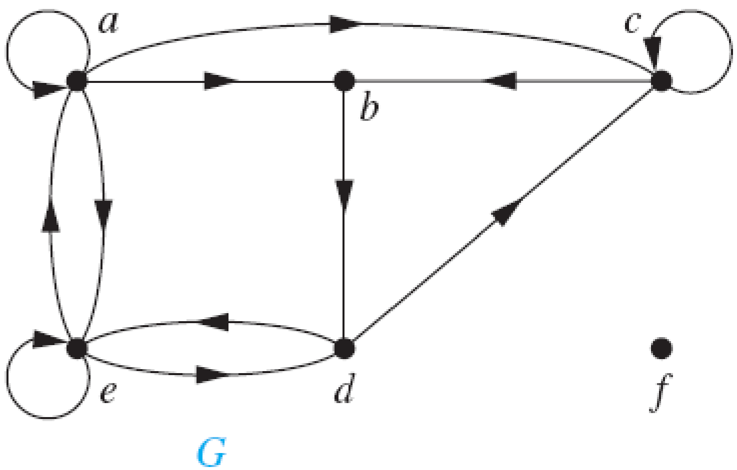
Định nghĩa 3:

Khi (u, v) là cạnh của một **đồ thị có hướng G**, thì u được gọi là *nối tới v* và v được gọi là *được nối từ u*. Đỉnh u gọi là ***đỉnh đầu***, đỉnh v gọi là ***đỉnh cuối*** của cạnh (u, v). Đỉnh đầu và đỉnh cuối của khuyên là trùng nhau.

Định nghĩa 4:

Trong đồ thị có hướng *bậc-vào của đỉnh v* kí hiệu $\deg^-(v)$ là số các cạnh có đỉnh cuối là v. *Bậc-ra của đỉnh v*, kí hiệu $\deg^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu là v.

Ví dụ: Tìm bậc-vào và bậc-ra của mỗi định trong đồ thị sau?



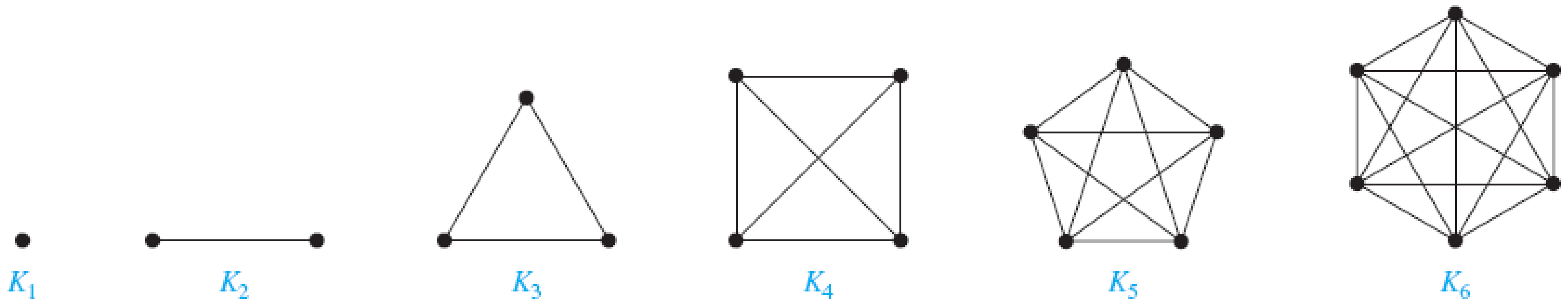
Định lí 3:

Gọi G = (V,E) là một đồ thị có hướng. Khi đó:

$$\sum_{v \in V} deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} deg^{+}(v) = |E|$$

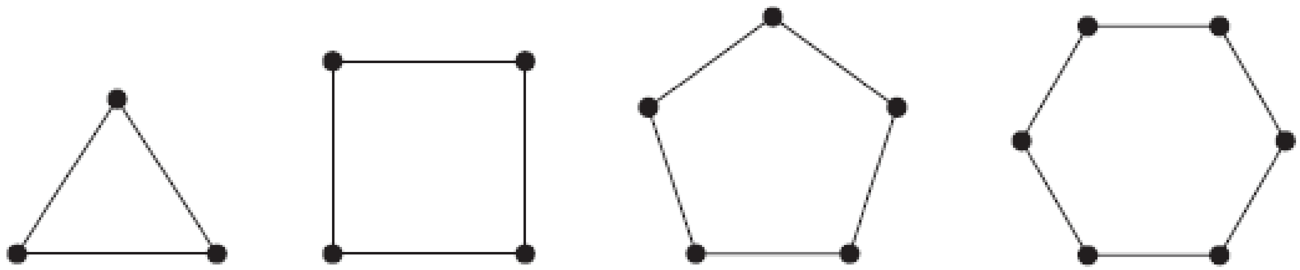
<u>Đồ thị đầy đủ</u>:

- ✓ Kí hiệu K_n
- ✓ Là đơn đồ thị
- ✓ Một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt



Đồ thị vòng:

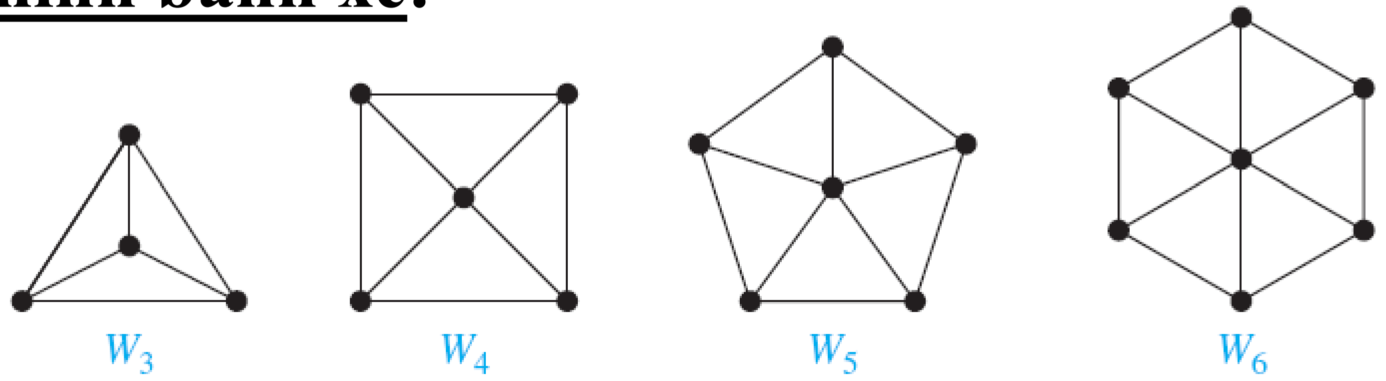
- ✓ Kí hiệu C_n , $n \geq 3$
- ✓ Có n đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$
- ✓ Các cạnh $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, ..., \{v_{n-1}, v_n\}$ và $\{v_n, v_1\}$



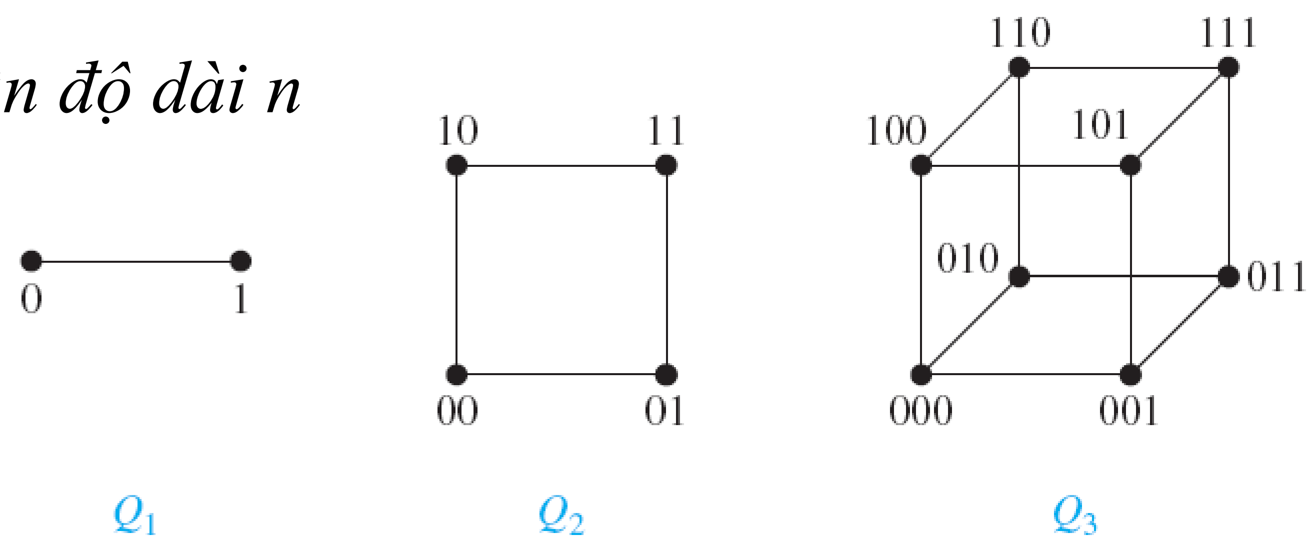
C_3 C_4 C_5 C_6

MỘT SỐ ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

Đồ thị hình bánh xe:

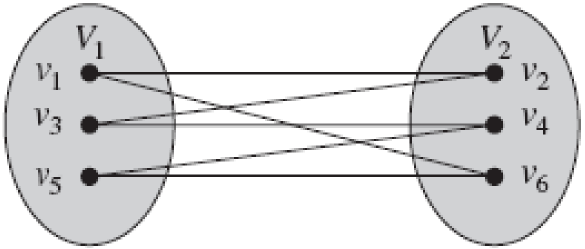


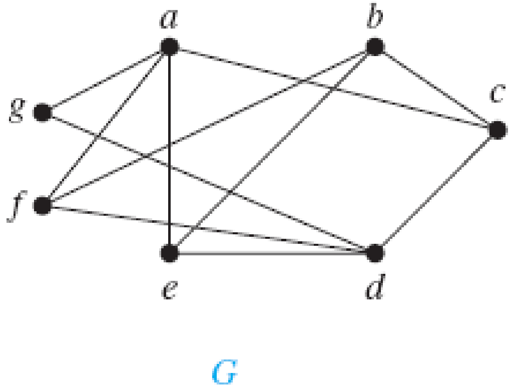
Các khối *n* chiều: *là đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh là 1 xâu nhị phân độ dài n*

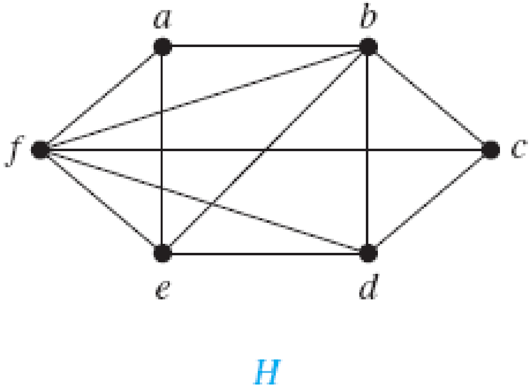


Định nghĩa 5:

Một đơn đồ thị G được gọi là ***đồ thị phân đôi*** nếu tập các đỉnh V có thể phân làm hai tập con không rỗng, rời nhau V_1 *và* V_2 sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2.



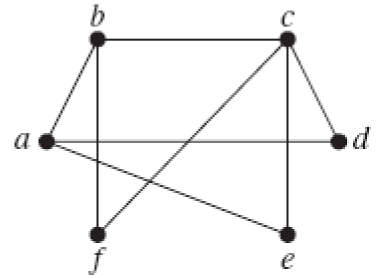




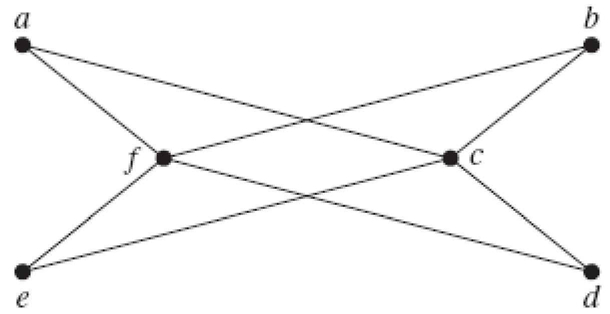
BÀI TẬP

- **Bài 2**: Các đồ thị đã cho có là phân đôi không?

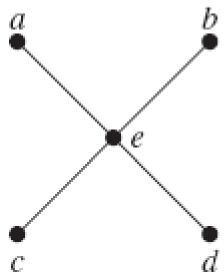
23.



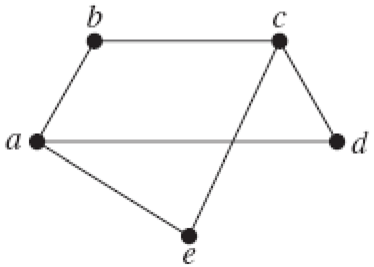
24.



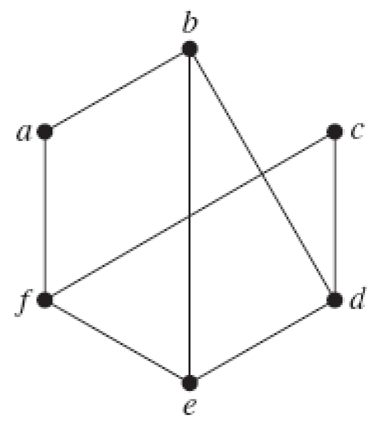
21.



22.

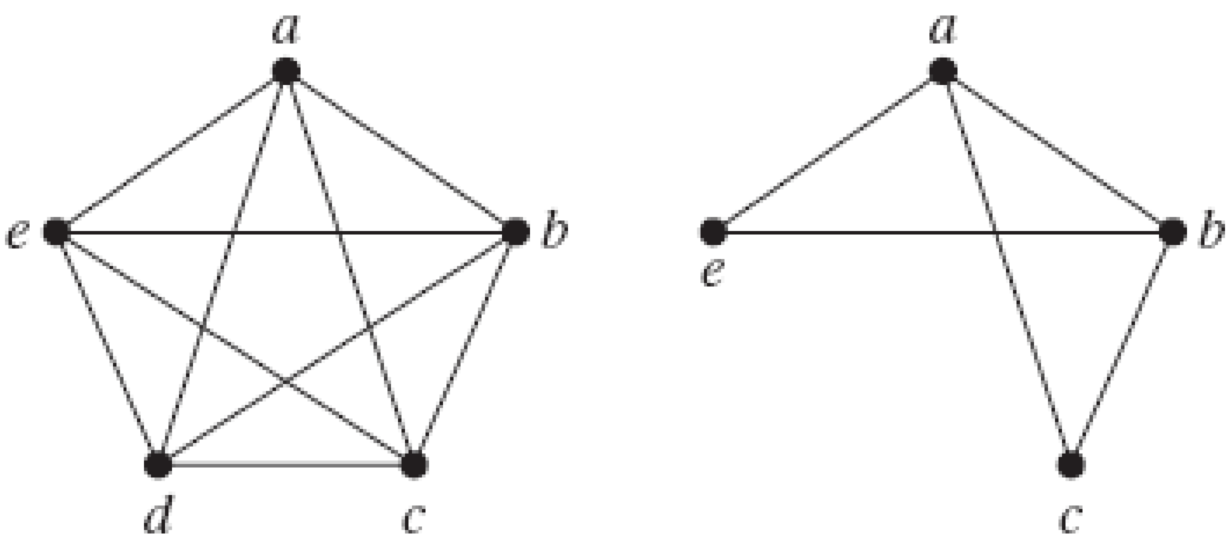


25.



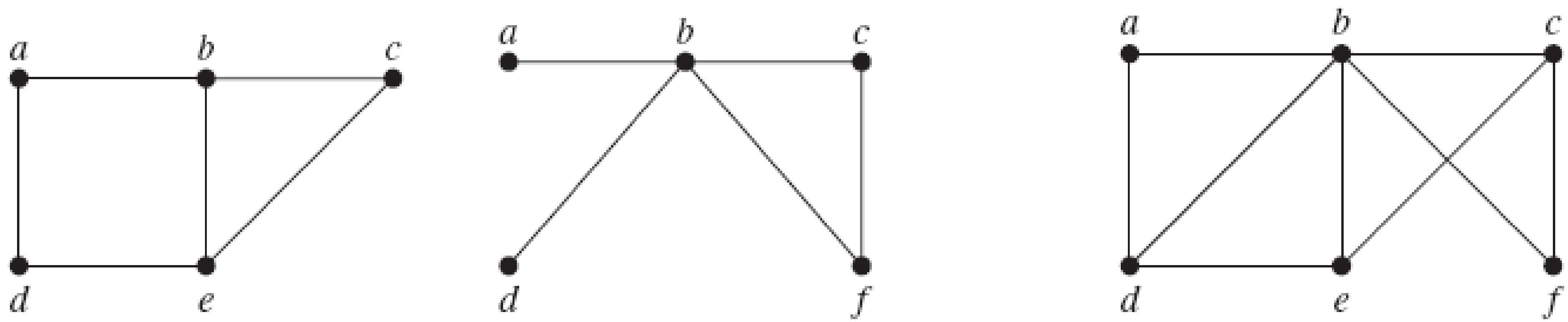
Định nghĩa 6:

Đồ thị con của đồ thị G = (V, E) là đồ thị H = (W, F), trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$



Định nghĩa 7:

Hợp của hai đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đơn đồ thị có tập các đỉnh là $V_1 \cup V_2$ và tập các cạnh $E_1 \cup E_2$. Ta kí hiệu hợp của các đồ thị G_1 và G_2 là $G_1 \cup G_2$.

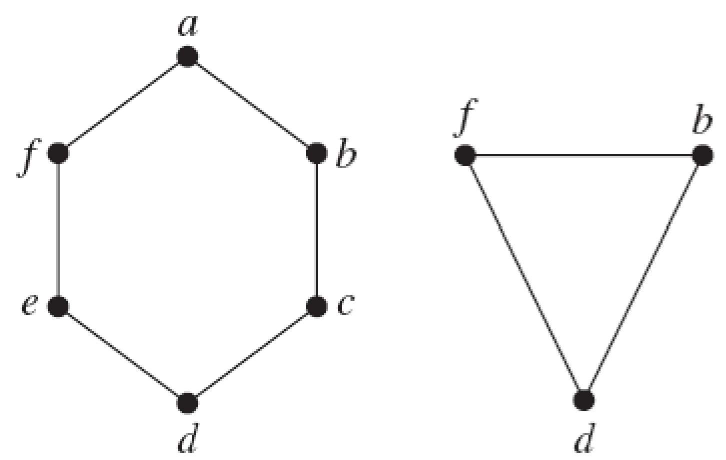


G_1 $\qquad$ G_2 $\qquad$ $G_1 \cup G_2$

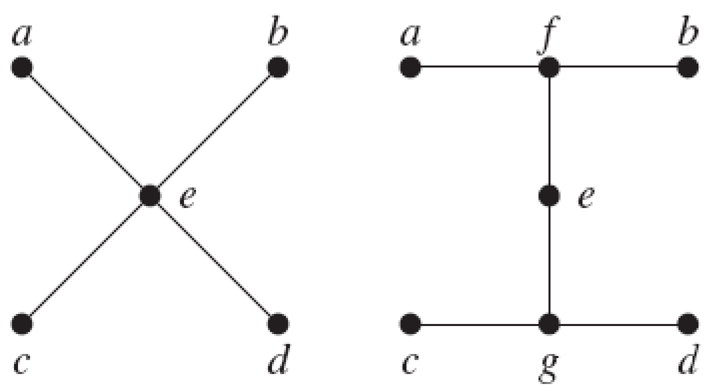
BÀI TẬP

- **Bài 3**: Tìm hợp của cặp hai đơn đồ thị sau

56.



57.



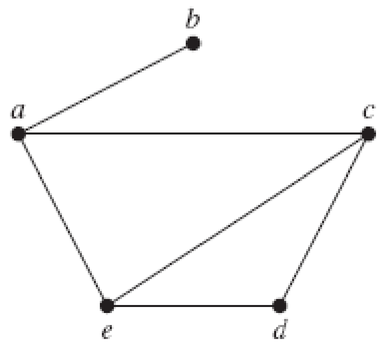
8.3 BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Biểu diễn đồ thị

- Danh sách kề
- Ma trận kề
- Ma trận liên thuộc

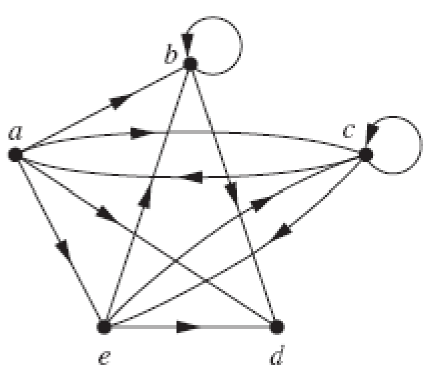
DANH SÁCH KỀ

- ✓ Chỉ rõ các đỉnh nối với mỗi đỉnh của đồ thị không có cạnh bội



Danh sách kề của đơn đồ thị

Đỉnh	Các đỉnh kề
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d



Danh sách kề của đồ thị có hướng

Đỉnh đầu	Đỉnh cuối
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

MA TRẬN KỀ

- Giả sử $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị, trong đó $|V| = n$
- Ma trận kề $A = [a_{ij}]$, là ma trận $n \times n$ trong đó:

$$a_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1} \text{ nếu } \{v_i, v_j\} \text{ là một cạnh của } G \\ \mathbf{0} \text{ nếu không có cạnh nối đỉnh } v_i \text{ với đỉnh } v_j \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\mathbf{a_{23} = 1}$

MA TRẬN KỀ

- Có *n!* ma trận kề khác nhau của một đồ thị *n* đỉnh
- Trường hợp đa đồ thị, giả đồ thị thì phần tử vị trí (i,j) bằng **số cạnh nối** các đỉnh a_i và a_j
- Trường hợp đồ thị có hướng: $\boldsymbol{a_{ij} = \{v_i, v_j\}}$, ***$v_i$: đỉnh đầu, v_j: đỉnh cuối***

Đỉnh cuối

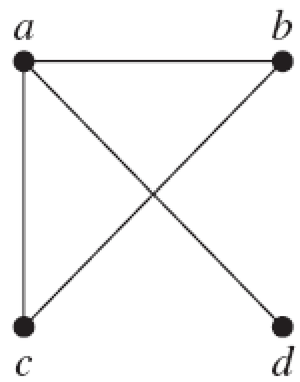
Đỉnh đầu

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$\mathbf{a_{23} = 1}$

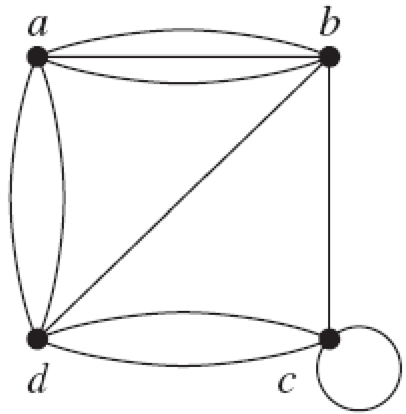
MA TRẬN KỀ

Ví dụ 1:



$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Ví dụ 2:



$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 3 & 0 & 2 \\ b & 3 & 0 & 1 & 1 \\ c & 0 & 1 & 1 & 2 \\ d & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

MA TRẬN LIÊN THUỘC

- Giả sử $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng
- tập đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và tập cạnh $e_1, e_2, \ldots, e_m$
- Ma trận liên thuộc gồm n cột, m hàng, $M = [m_{ij}]$ trong đó:

$$\boldsymbol{m_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{1} \text{ nếu } e_j \text{ nối với đỉnh } v_i \\ \mathbf{0} \text{ nếu } e_j \text{ không nối với đỉnh } v_i \end{cases}$$

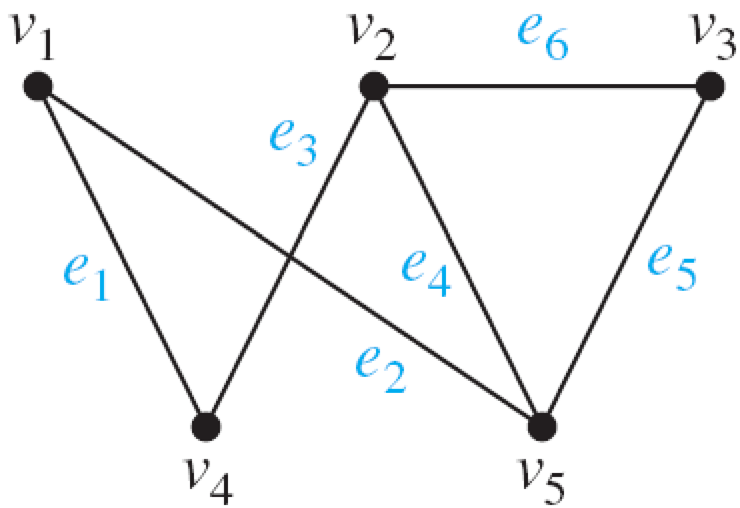
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \end{array}$$

$\mathbf{m_{23} = 1}$

- Ma trận liên thuộc có thể biểu diễn các cạnh bội và khuyên

MA TRẬN LIÊN THUỘC

Ví dụ:

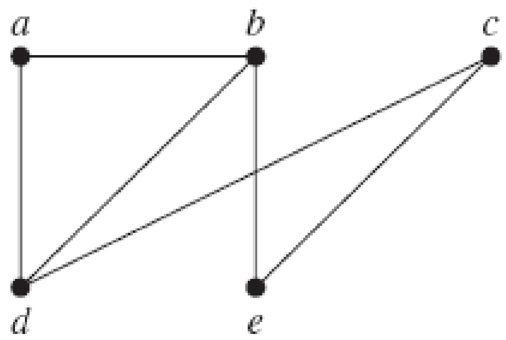


$$
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

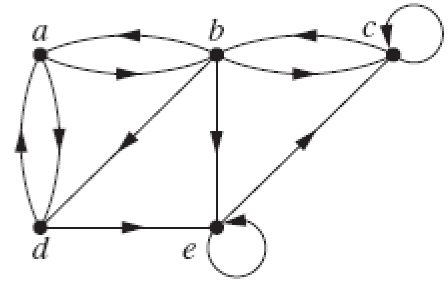
BÀI TẬP

- **Bài 4**: Biểu diễn đồ thị sau bằng ma trận kề

2.

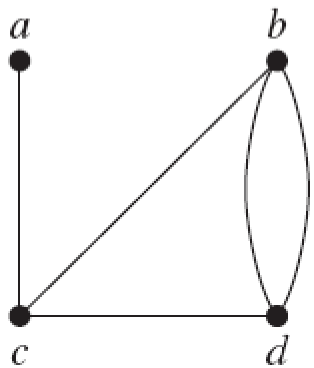


4.

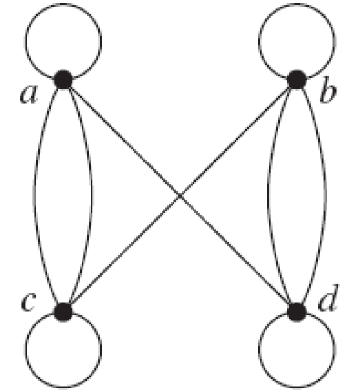


- **Bài 5**: Biểu diễn đồ thị sau bằng ma trận liên thuộc

13.



15.

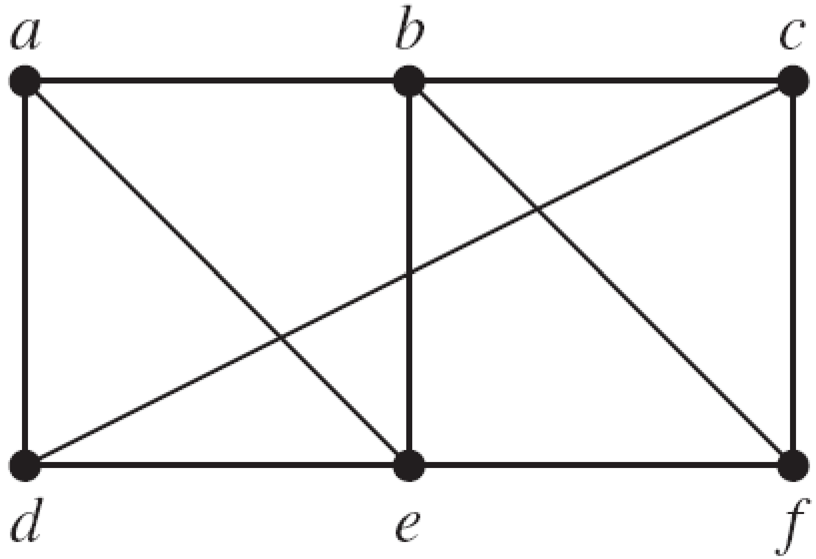


8.4 TÍNH LIÊN THÔNG

Định nghĩa 1:

- **Đường đi** độ dài ***n*** từ *u* tới *v*, $n \in Z^+$ của đồ thị vô hướng là dãy các cạnh $e_1, e_2, \dots, e_n$ sao cho $f(e_1) = \{x_0, x_1\}$, $f(e_2) = \{x_1, x_2\}, \dots$, $f(e_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$ với $x_0 = u$ và $x_n = v$
- Đường đi gọi là **chu trình** nếu điểm đầu và điểm kết thúc tại một điểm, $u = v$
- Đường đi hay chu trình gọi là **đơn** nếu nó **không đi qua một cạnh quá 1 lần**

<u>Ví dụ</u>:

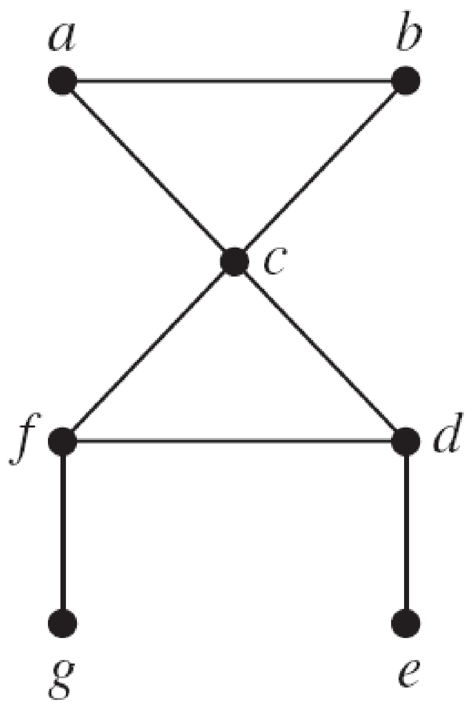


- Chỉ ra một đường đi đơn độ dài 4?
- Chỉ ra một đường chu trình độ dài 4?
- Chỉ ra đường đi độ dài 5 không là đường đi đơn?

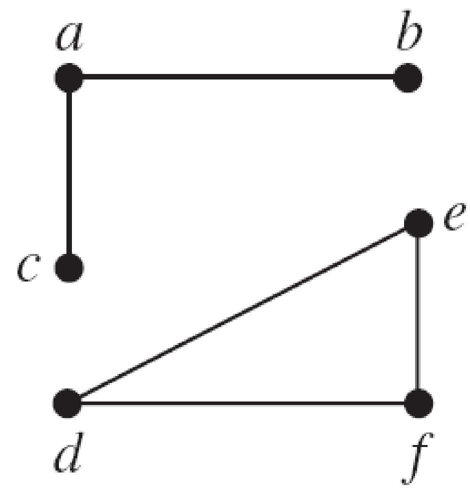
ĐƯỜNG ĐI

Định nghĩa 3:

- Một **đồ thị vô hướng** được gọi là ***liên thông*** nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị



G1



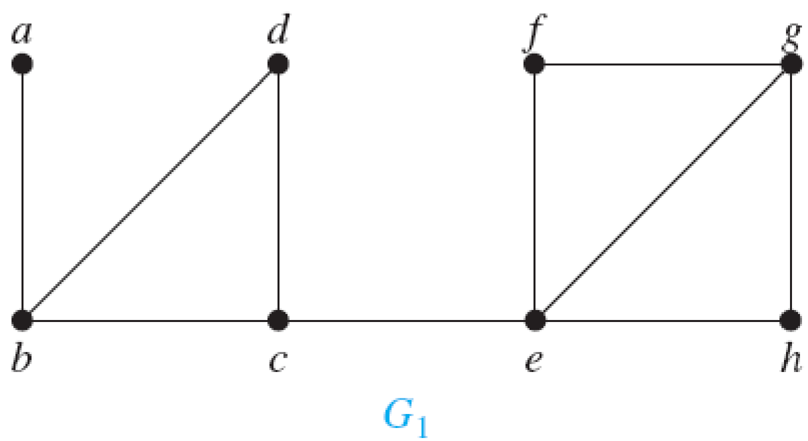
G2

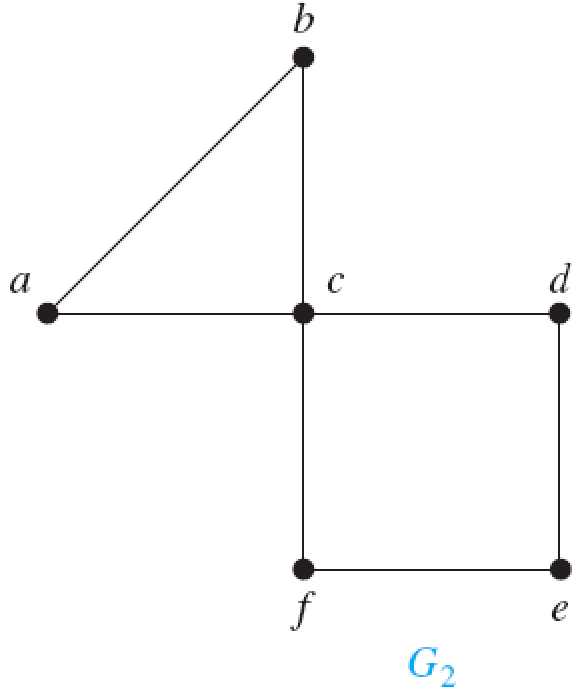
Định lí 1:

Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông luôn có đường đi đơn

- Đồ thị không liên thông là **hợp** của hai hay nhiều đồ thị con liên thông
- Các đồ thị con liên thông rời nhau gọi là **các thành phần liên thông**
- **Đỉnh cắt**: là đỉnh khi xóa đi tạo ra đồ thị con mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị ban đầu
- **Cạnh cắt:** là cạnh nếu bỏ đi sẽ tạo ra một đồ thị có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị ban đầu

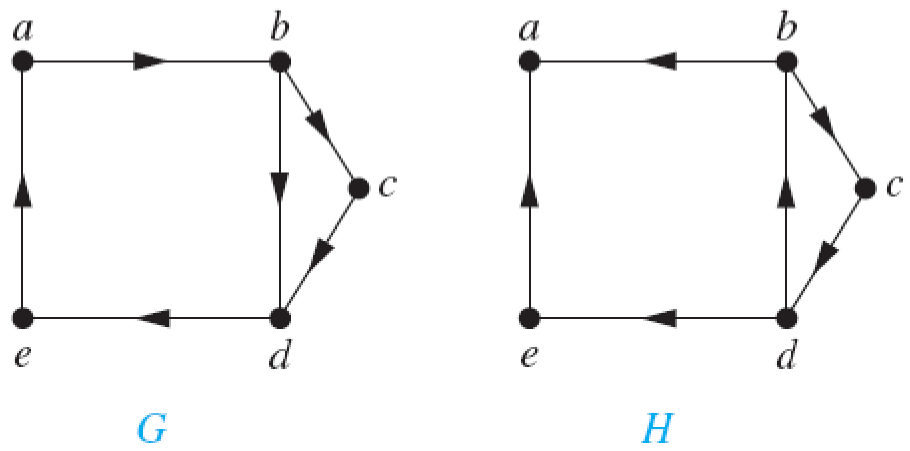
Ví dụ: Tìm đỉnh cắt và cạnh cắt của đồ thị sau?





Định nghĩa 4:

Đồ thị có hướng gọi là ***liên thông mạnh*** nếu có đường đi từ *a* tới *b* và từ *b* tới *a* với mọi đỉnh *a* và *b* của đồ thị.



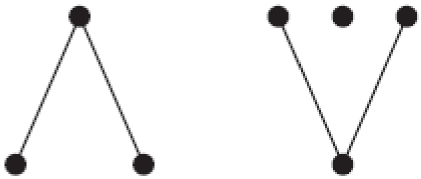
Định nghĩa 5:

Đồ thị có hướng gọi là ***liên thông yếu*** nếu có đường đi giữa hai đỉnh bất kì của đồ thị vô hướng nền

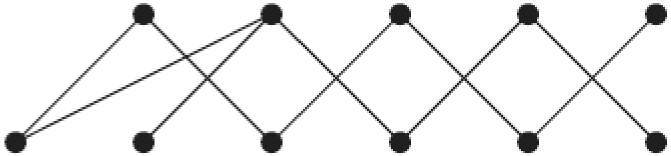
BÀI TẬP

- **Bài 6**: Các đồ thị sau có liên thông không?

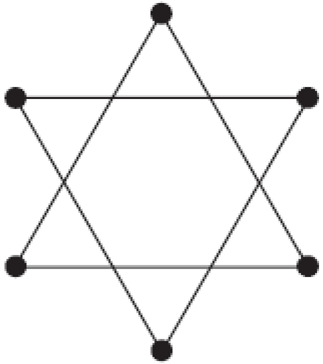
3.



4.



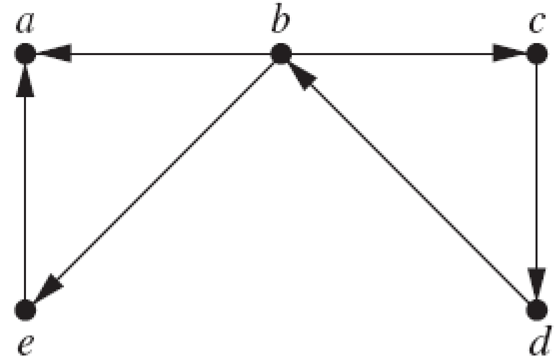
5.



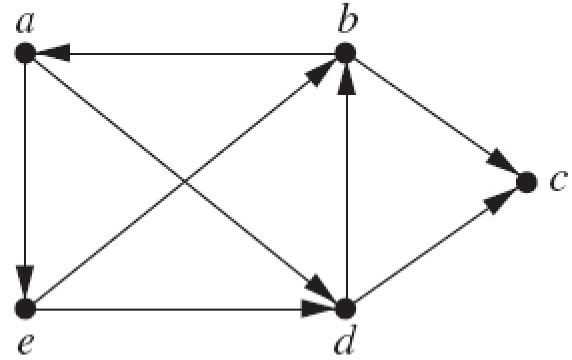
45

- **Bài 7**: Chỉ ra các đồ thị sau đây có là liên thông mạnh không? có là liên thông yếu không? Tìm các thành phần liên thông

a)



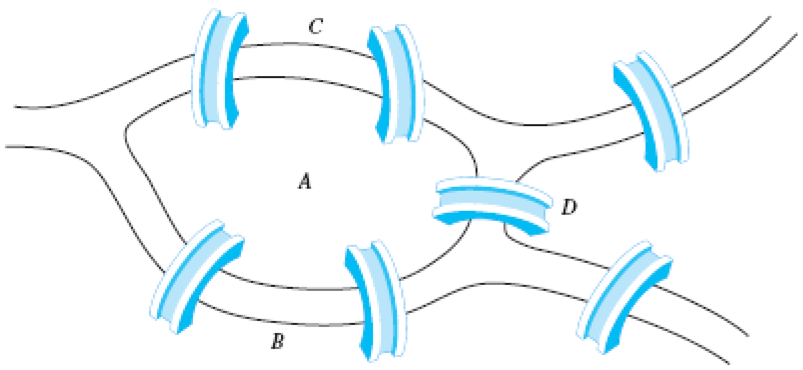
b)

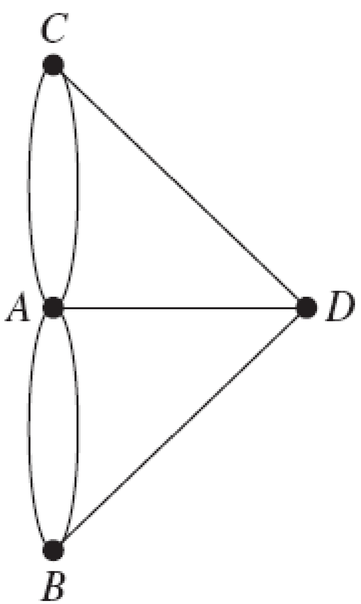


8.5 ĐƯỜNG ĐI EULER VÀ HAMILTON

Bài toán Königsberg

- Thành phố Königsberg chia thành 4 vùng bởi các nhánh sông Pregel.
- *Người ta đã xây 7 cây cầu để nối 4 vùng*
- Hỏi có thể **xuất phát tại 1 điểm** để đi qua **tất cả các cầu**, mỗi chiếc cầu **không đi qua nhiều hơn 1** lần rồi trở về **điểm xuất phát**?

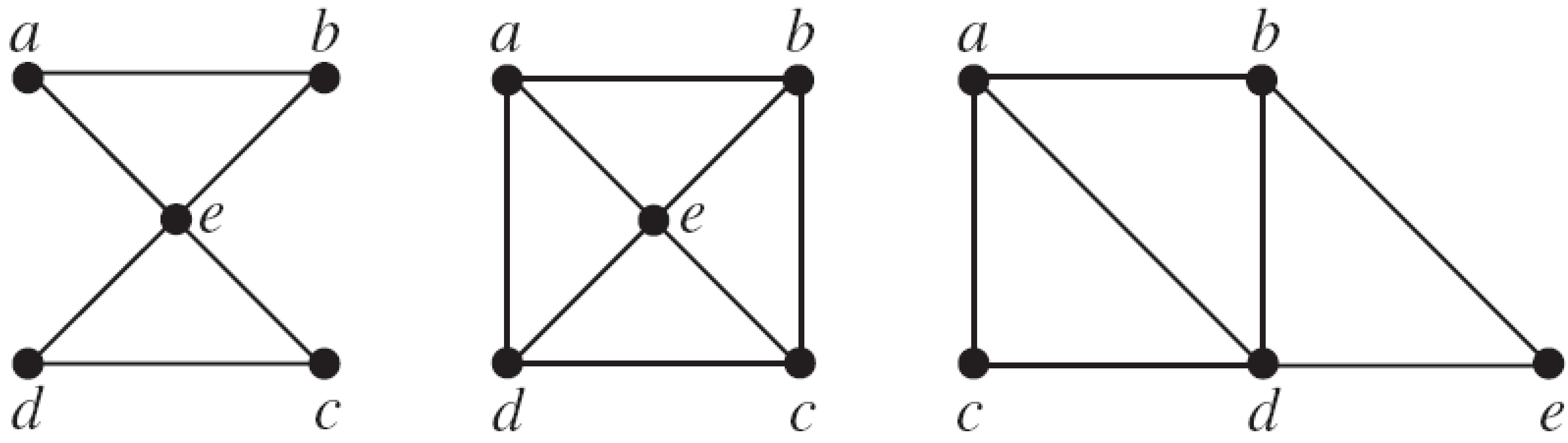




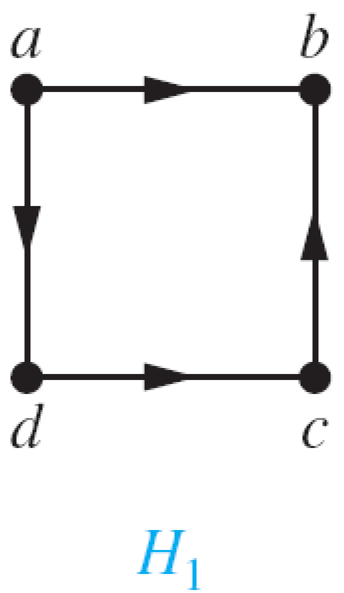
Định nghĩa 1:

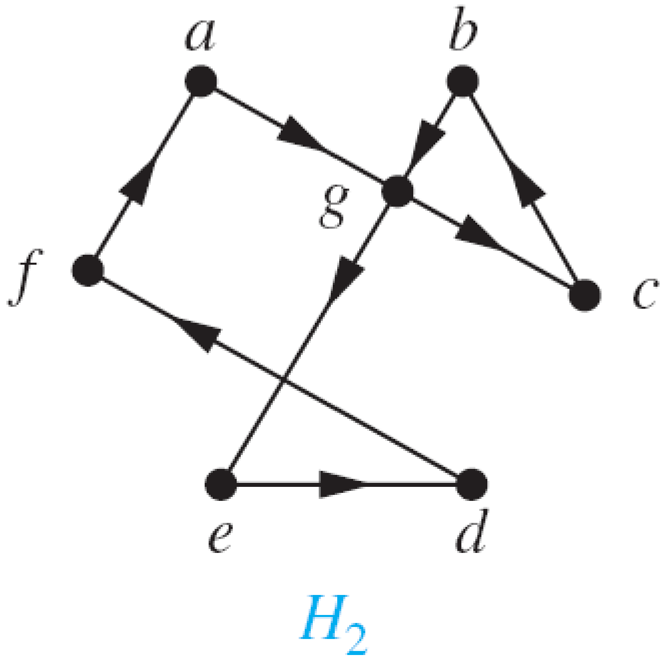
- Chu trình đơn chứa **tất cả các cạnh** của đồ thị G được gọi là ***chu trình Euler***.
- ***Đường đi Euler*** trong G là đường đi đơn chứa mọi cạnh của G.

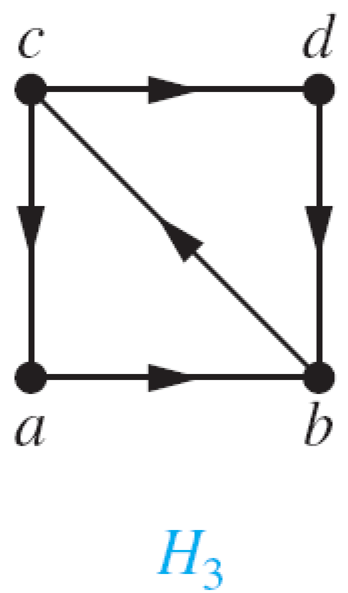
Ví dụ 1: Đồ thị nào sau đây có chu trình Euler?



Ví dụ 2: Đồ thị nào sau đây có chu trình Euler?

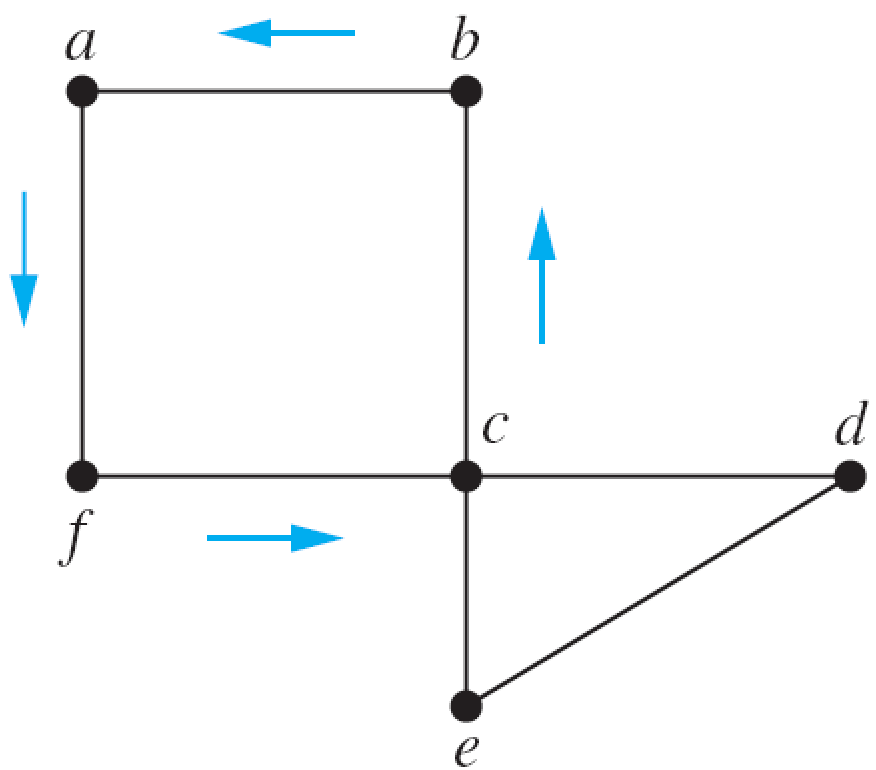






Định lí 1:

Một đa đồ thị liên thông ***có chu trình Euler*** nếu và chỉ nếu mỗi **đỉnh** của nó đều có **bậc chẵn**.

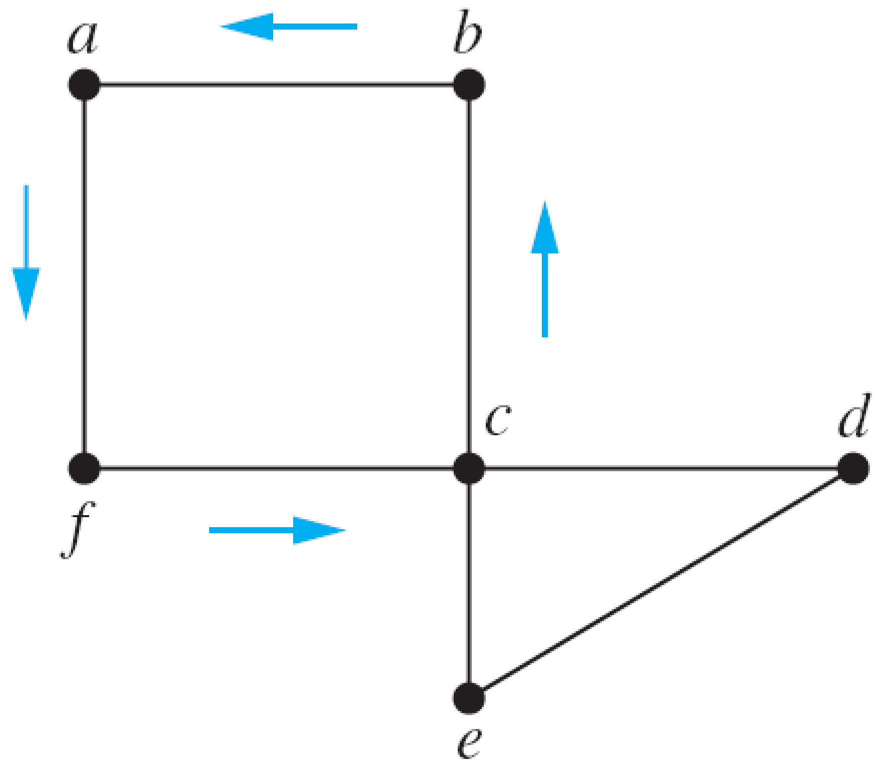


XÂY DỰNG CHU TRÌNH EULER

THUẬT TOÁN : Xây dựng chu trình Euler

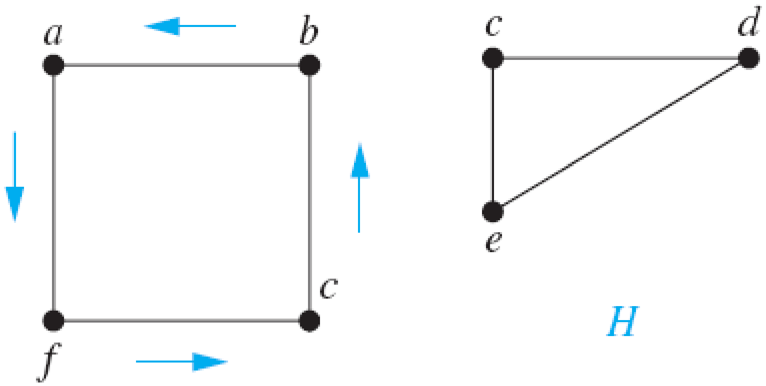
Procedure *Euler* (*G:* đa đồ thị liên thông với tất cả các đỉnh bậc chẵn)
C := chọn 1 chu trình bất kì
H := *G* đã xóa đi cạnh của C
while *H* còn các cạnh
begin
  C' = chu trình trong *H* có đi qua đỉnh trong *C*
  H := *H* xóa đi cạnh của C' và đỉnh treo
  C := *C* cộng thêm *C'* chèn vào tại một đỉnh thích hợp
end
{ *chu trình* là chu trình Euler}

Ví dụ: Tìm chu trình Euler của đồ thị sau?



<u>Giải</u>:

- Chọn C = chu trình **{a, f, c, b, a}**
- H = các cạnh {c,d}, {c, e}, {e, d}



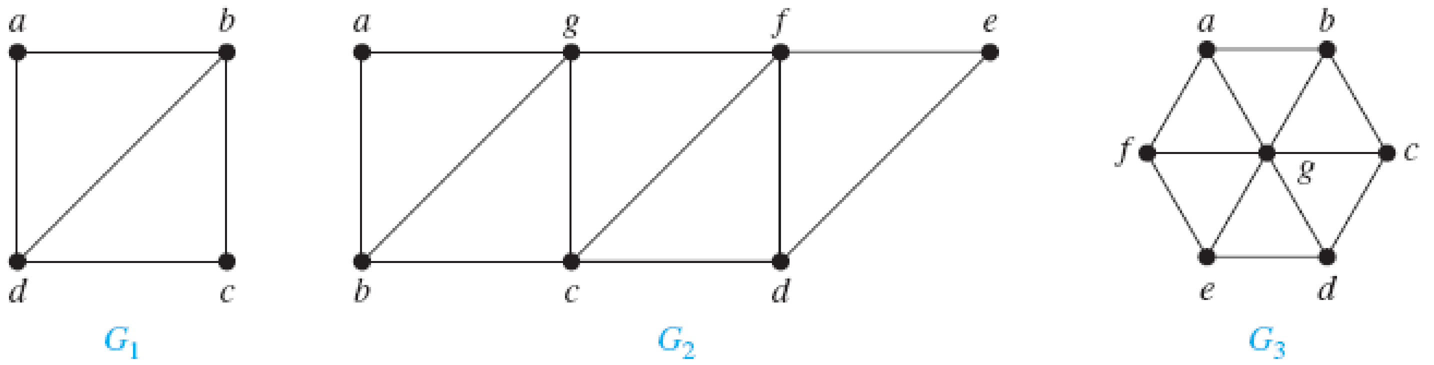
- C' = chu trình **{c, d, e, c}**
- H = ∅
- C = chu trình {a, f, c, b, a} ∪ { c, d, e, c} = {a, f, **c**, d, e, c, b, a}

- Kết thúc khi H = ∅

Định lí 2:

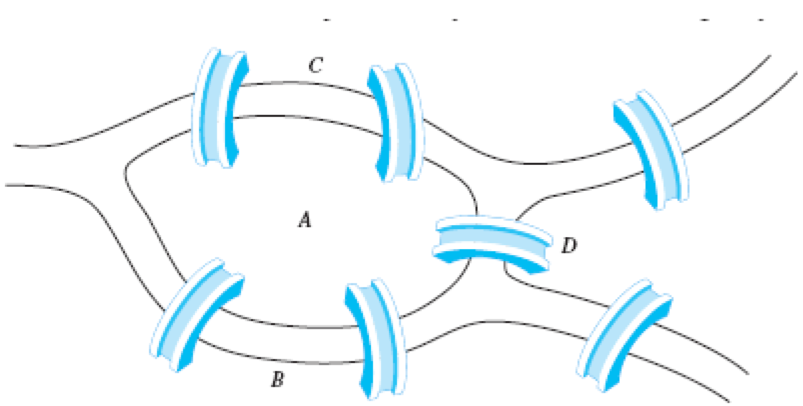
Một đa đồ thị liên thông ***có đường đi Euler*** nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu nó **có đúng hai đỉnh bậc lẻ**.

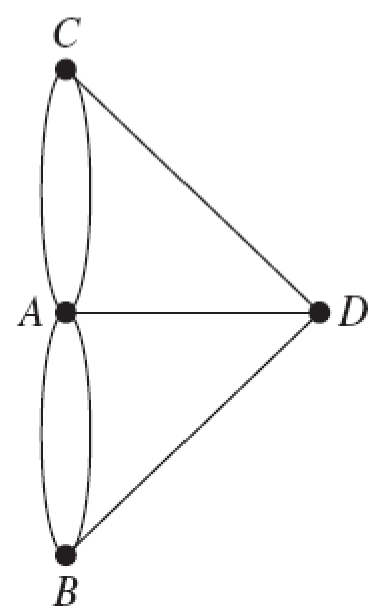
Ví dụ: Đồ thị nào có đường đi Euler?



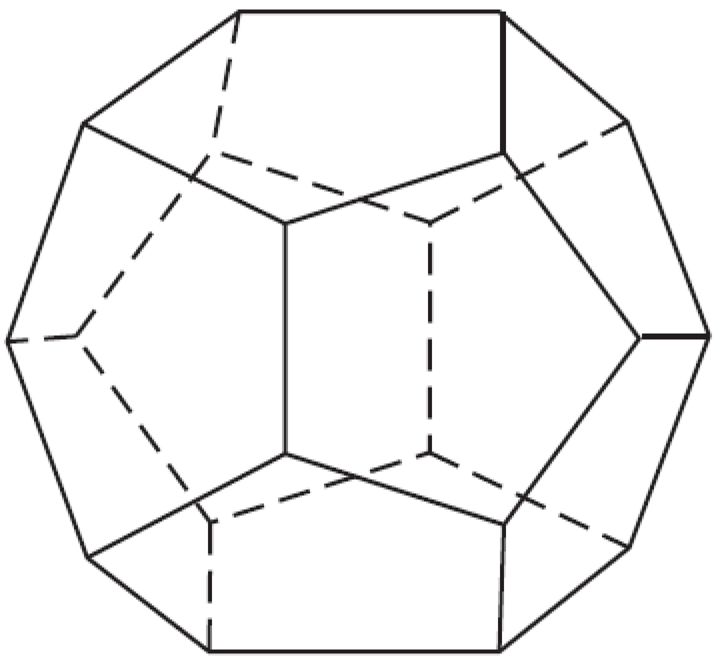
Bài toán Königsberg

- Thành phố Königsberg chia thành 4 vùng bởi các nhánh sông Pregel.
- *Người ta đã xây 7 cây cầu để nối 4 vùng*
- Hỏi có thể **xuất phát tại 1 điểm** để đi qua **tất cả các cầu**, mỗi chiếc cầu **không đi qua nhiều hơn 1** lần rồi trở về **điểm xuất phát**?

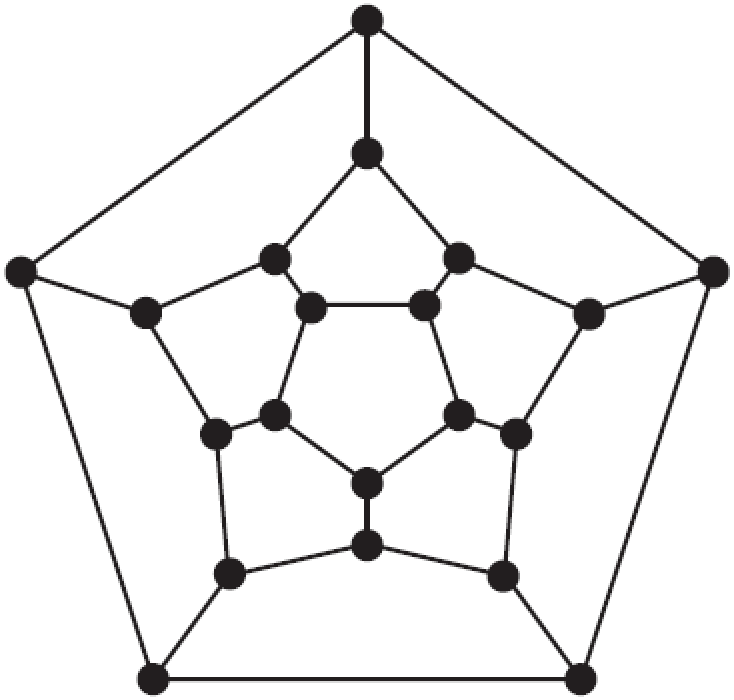




Trò chơi đố vui của William Rowan Hamilton



(a)

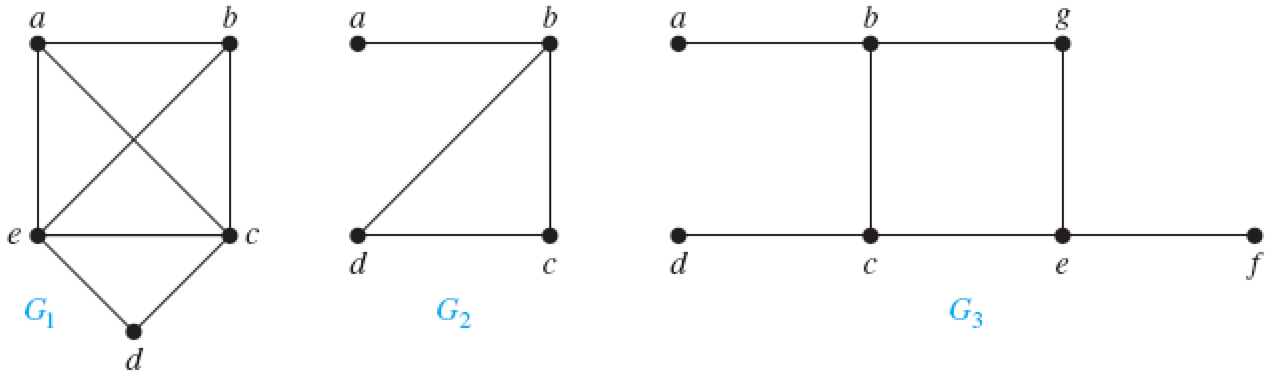


(b)

Định nghĩa 2:

- Đường đi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ trong đồ thị G(V, E) được gọi là ***đường đi Hamilton*** nếu V= $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ và $x_i \neq x_j$, $0 \leq i < j \leq n$
- Chu trình $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0$ trong đồ thị G được gọi là ***chu trình Hamilton*** nếu $x_0, x_1, \ldots, x_n$ là đường đi Hamilton.

Ví dụ: Đồ thị nào có chu trình Hamilton?



Định lí 3:

ĐỊNH LÍ DIRAC. Giả sử G là một đơn đồ thị liên thông với n đỉnh, trong đó $n \geq 3$, G **có chu trình Hamilton** nếu bậc của mỗi đỉnh ít nhất bằng ***n/2***.

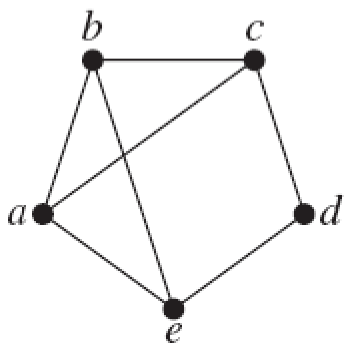
Định lí 4:

ĐỊNH LÍ ORE. Nếu G là một đơn đồ thị n đỉnh, trong đó $n \geq 3$, sao cho $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ với mọi cặp đỉnh không liền kề u và v, khi đó G **có chu trình Hamilton.**

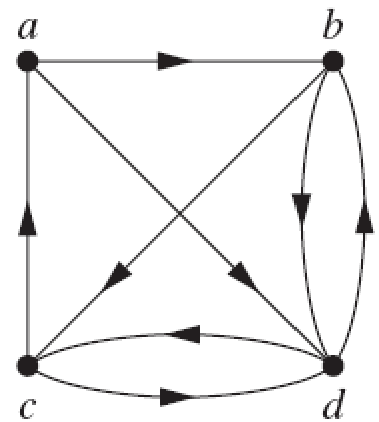
BÀI TẬP

- **Bài 8**: Xác định các đồ thị sau có chu trình Euler, đường đi Euler?

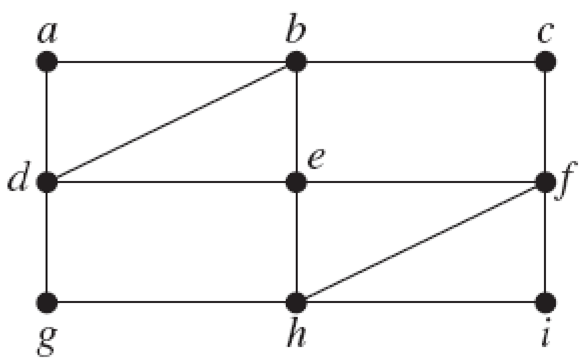
1.



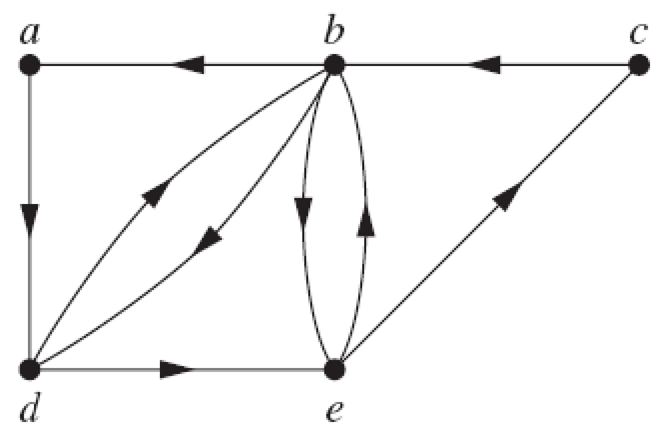
18.



2.

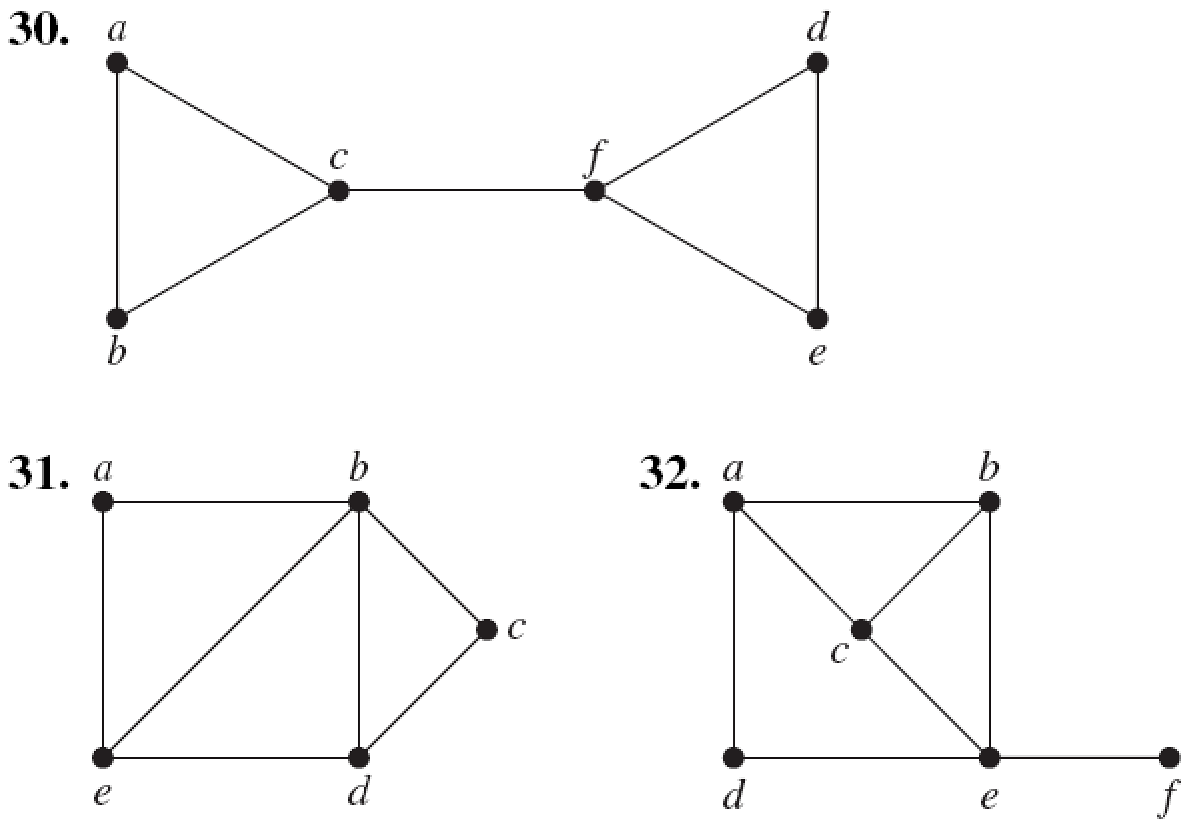


20.



BÀI TẬP

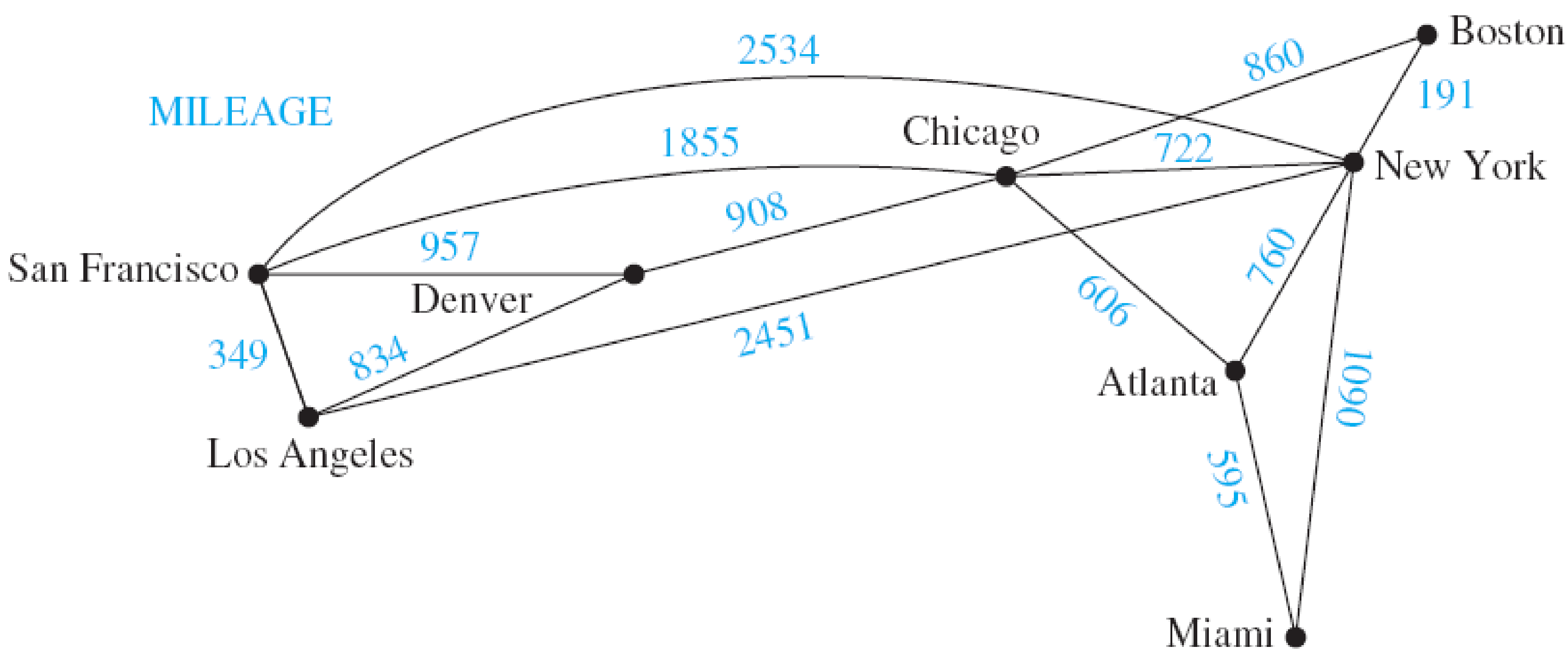
- **Bài 9**: Xác định các đồ thị sau có chu trình và đường đi Hamilton?



8.6 BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG SỐ

Đồ thị có trọng số là đồ thị mà mỗi cạnh của nó được **gán một số** (nguyên hoặc thực) gọi là **trọng số** của cạnh.

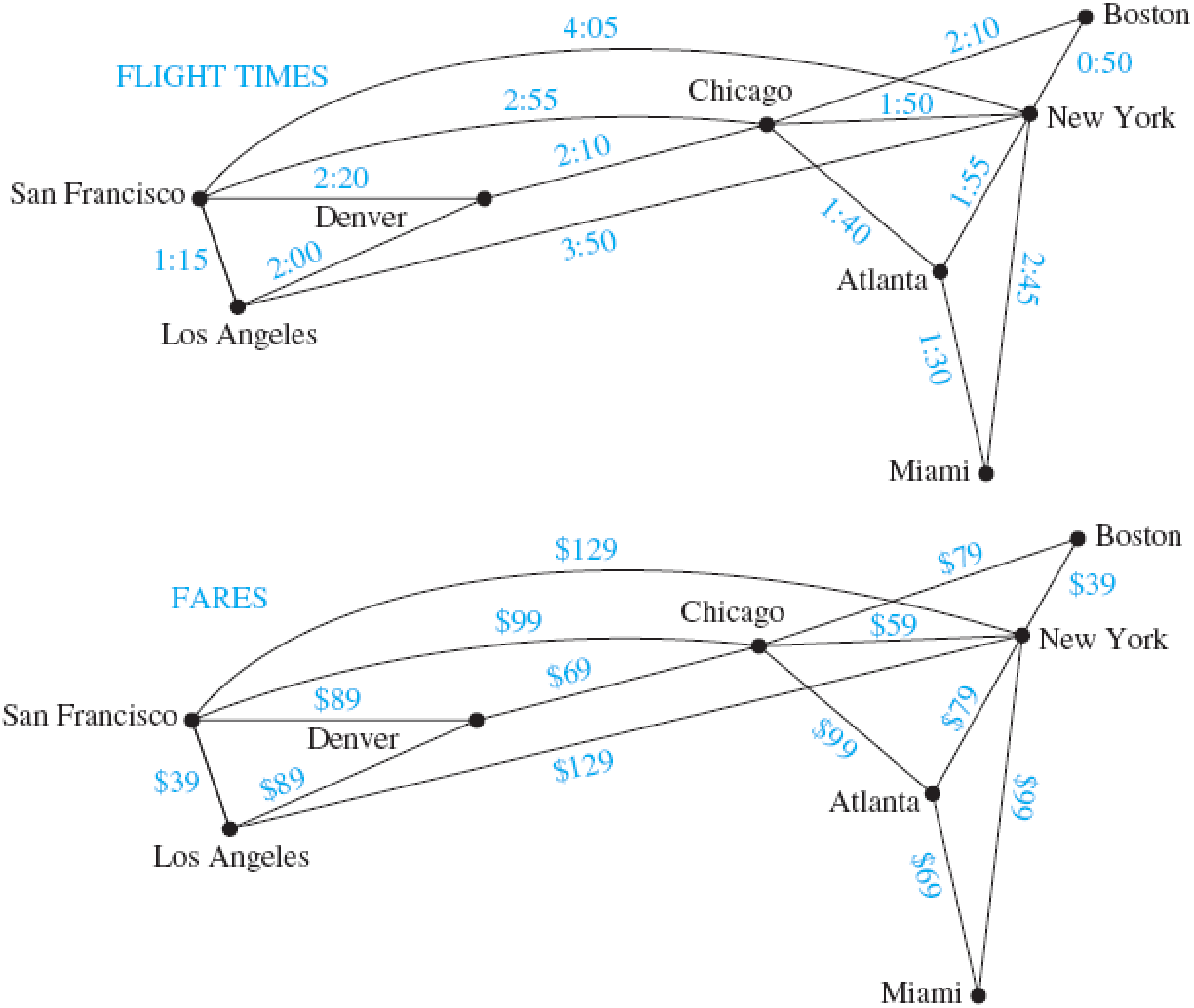


ĐỒ THỊ CÓ TRỌNG SỐ

Bài toán liên quan tới đồ thị có trọng số:

- Xác định ***đường đi ngắn nhất*** giữa hai đỉnh của một mạng
- Tìm đường đi có ***chi phí rẻ nhất***
- Tìm đường đi có ***thời gian trả lời nhanh nhất*** cho một cuộc truyền thông giữa các máy tính

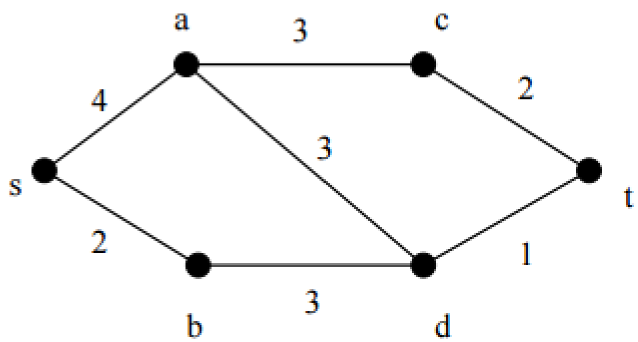
<u>Ví dụ</u>:

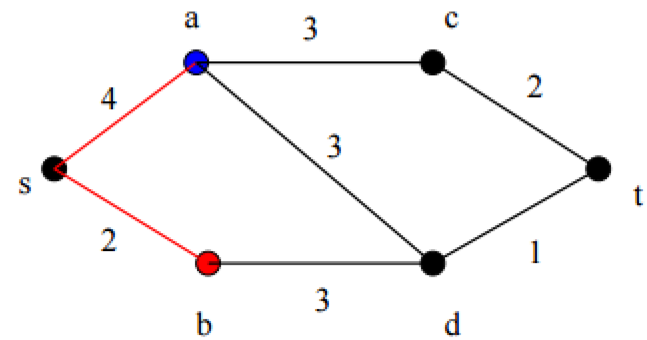

FLIGHT TIMES
4:05
2:10
Boston
0:50
2:55
Chicago
1:50
New York
2:10
San Francisco
2:20
Denver
1:55
1:40
1:15
2:00
3:50
Atlanta
2:45
Los Angeles
1:30
Miami
FARES
$129
$79
Boston
$39
$99
Chicago
$59
New York
$69
San Francisco
$89
Denver
$79
$99
$39
$89
$129
Atlanta
$99
Los Angeles
$69
Miami

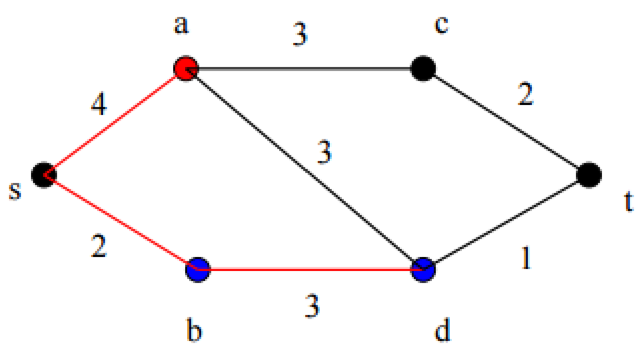
THUẬT TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

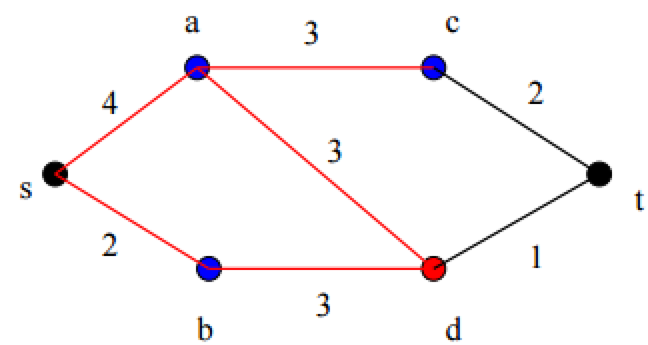
- Do **E.Dijkstra** nhà toán học ngươi Hà Lan đề xuất năm 1959
- Thực hiện tìm độ dài của đi ngắn nhất từ *a* tới đỉnh thứ nhất, độ dài của đường đi ngắn nhất tới đỉnh thứ 2... cho tới đỉnh *z*

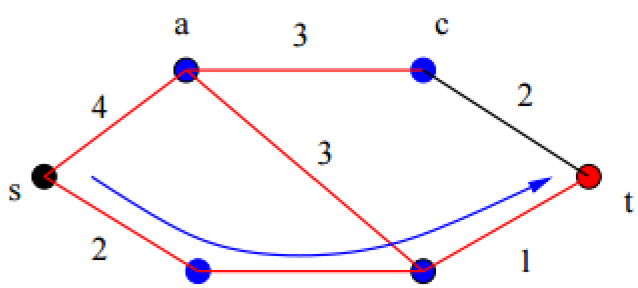
<u>Ví dụ</u>:


a
3
c
4
2
3
s
t
2
1
3
b
d


a
3
c
4
2
3
s
t
2
1
3
b
d


a
3
c
4
2
3
s
t
2
1
3
b
d


a
3
c
4
2
3
s
t
2
1
3
b
d


a
3
c
4
2
3
s
t
2
1

Giải thuật: Tìm đường đi ngắn nhất từ a đến z

- Gán cho đỉnh *a* nhãn bằng 0 và các đỉnh khác là ∞. Kí hiệu $L_0(a) = 0$ và $L_0(v) = \infty$
- Tập S_k là tập các đỉnh được gán nhãn sau tại bước lặp *k*
- $L_k(v)$ là nhãn của *v* tại bước *k*, là độ dài đường đi ngắn nhất từ *a* tới *v* chỉ chứa các đỉnh thuộc S_k
- Để sửa nhãn của *v:*

$$L_k(a,v) = \min\{L_{k-1}(a,v), L_k(a,v) + w(u,v)\}$$

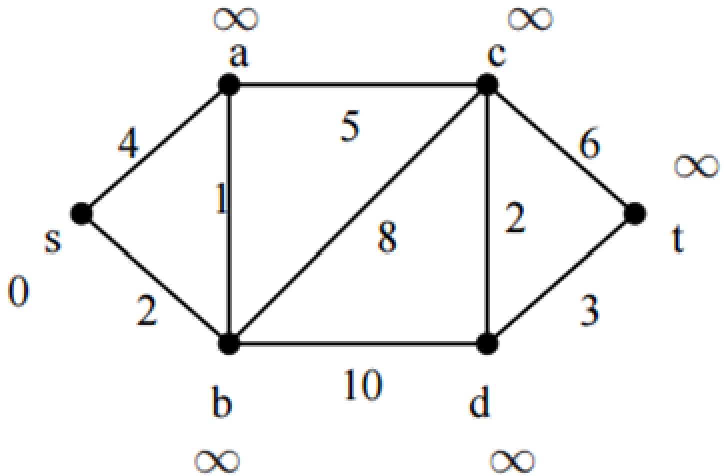
- Lặp liên tiếp cho tới khi đạt tới đỉnh *z*

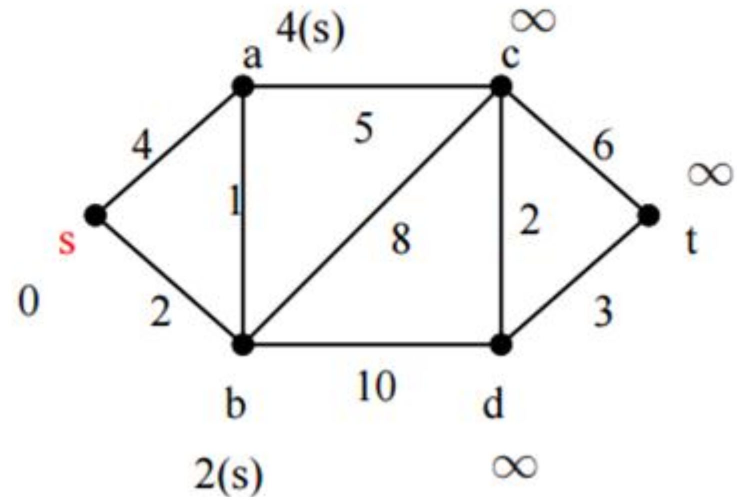
THUẬT TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

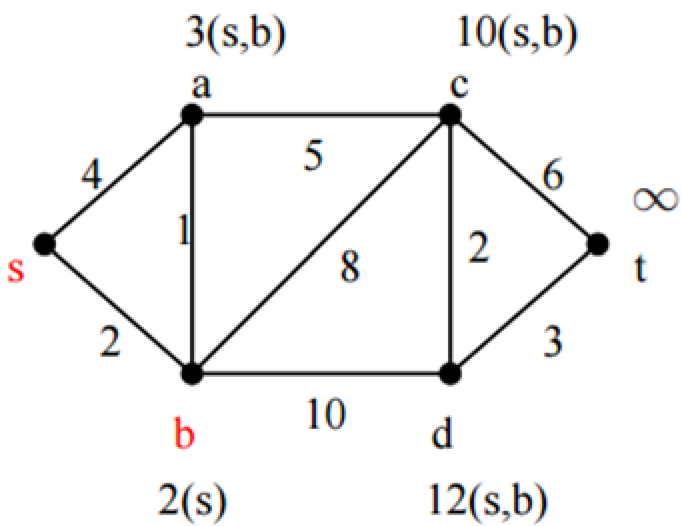
THUẬT TOÁN : **Thuật toán Dijkstra**

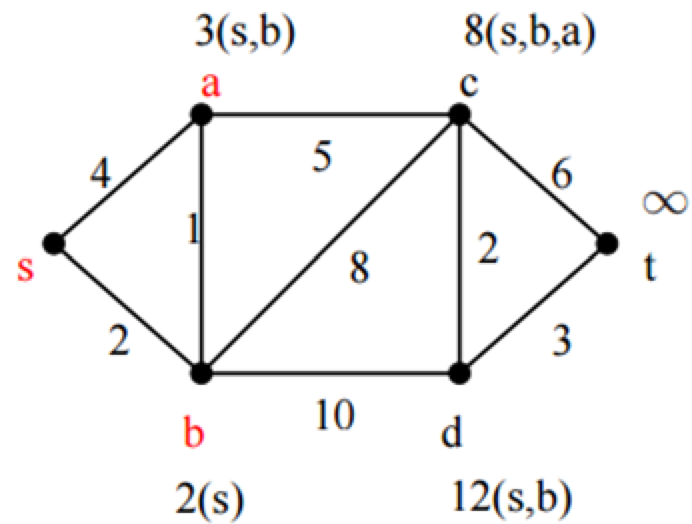
Procedure *Dijkstra*(*G:* đa đồ thị liên thông có trọng số dương)
{G có các đỉnh $a = v_0, v_1, v_2..., v_n = z$ và trọng số $w(v_i, v_j)$, với $w(v_i, v_j) = \infty$ nếu $\{v_i, v_j\}$ không có cạnh trong G}
for i :=1 **to** n
    $L(v_i) = \infty$
L(a) := 0
S := ∅
while $z \notin S$
begin
    u := đỉnh $\notin S$ có nhãn $L(u)$ nhỏ nhất
    $S := S \cup \{u\}$
    for tất cả các đỉnh v không thuộc S
        if $L(u) + w(u,v) < L(v)$ then $L(v) := L(u) + w(u,v)$
  { thêm vào S đỉnh có nhãn nhỏ nhất và sửa đổi nhãn của các đỉnh $\notin$ S
end **{** $L(z)$ = độ dài đường đi ngắn nhất từ a tới z}

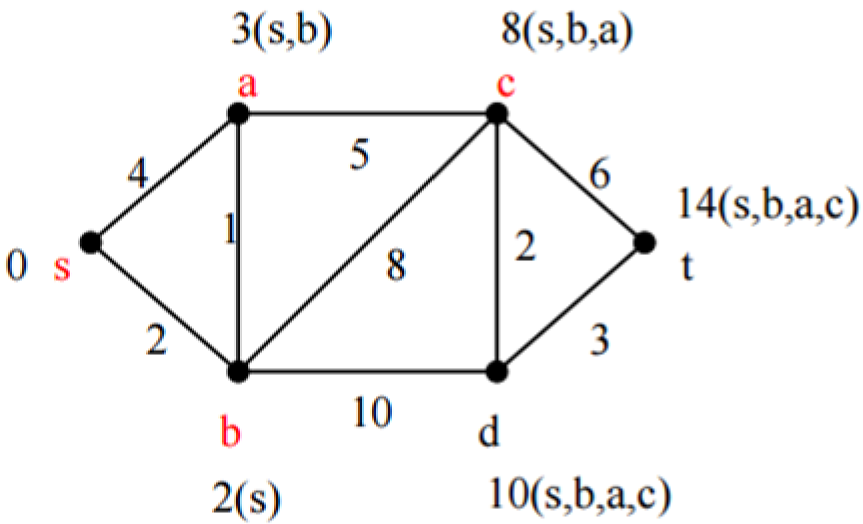
Ví dụ

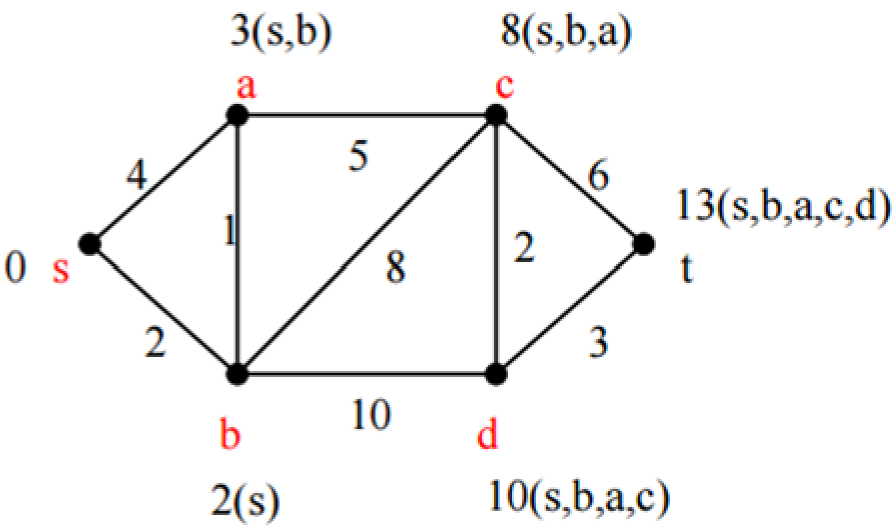

∞
a
∞
c
4
5
6
∞
1
8
2
s
t
0
2
3
b
10
d
∞
∞

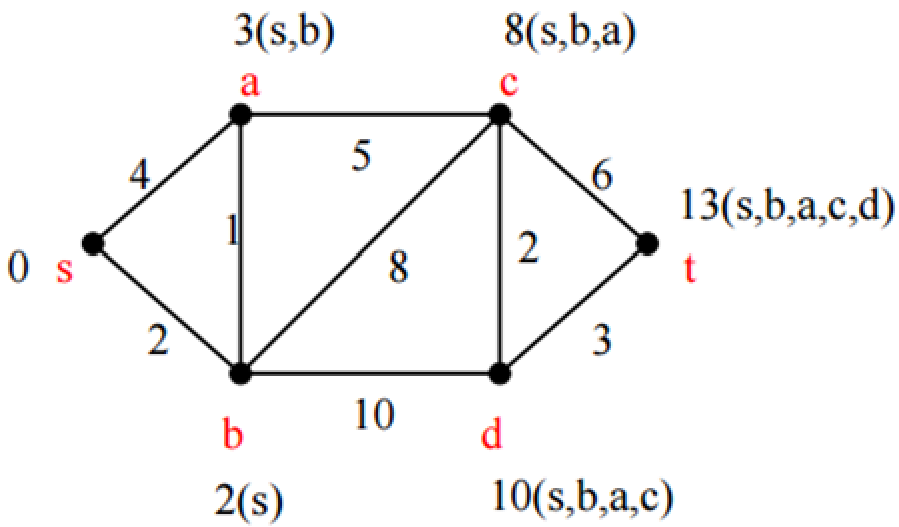

4(s)
a
∞
c
4
5
6
∞
1
8
2
s
t
0
2
3
b
10
d
2(s)
∞


3(s,b)
a
10(s,b)
c
4
5
6
∞
1
8
2
s
t
2
3
b
10
d
2(s)
12(s,b)


3(s,b)
a
8(s,b,a)
c
4
5
6
∞
1
8
2
s
t
2
3
b
10
d
2(s)
12(s,b)


3(s,b)
8(s,b,a)
a
c
4
5
6
14(s,b,a,c)
1
0 s
8
2
t
2
3
b
10
d
2(s)
10(s,b,a,c)


3(s,b)
8(s,b,a)
a
c
4
5
6
13(s,b,a,c,d)
1
0 s
8
2
t
2
3
b
10
d
2(s)
10(s,b,a,c)


3(s,b)
8(s,b,a)
a
c
4
5
6
13(s,b,a,c,d)
1
0 s
8
2
t
2
3
b
10
d
2(s)
10(s,b,a,c)

THUẬT TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

u	S	$\notin$ S	s	a	b	c	d	t
	$\varnothing$	s, a, b, c, d, t	0	∞	∞	∞	∞	∞
s, L(s)=0	s	a, b, c, d, t	-	[4, s]	[2, s]*	∞	∞	∞
b, L(b)=2	s, b	a, c, d, t	-	[3, b]*	-	[10,b]	[12,b]	∞
a, L(a)=3	s,b,a	c, d, t	-	-	-	[8,a]*	[12,b]	∞
c, L(c)=8	s, b, a, c	d, t	-	-	-	-	[10,c]*	[14,c]
d, L(d)=10	s, b, a, c, d,	t	-	-	-	-	-	[13,d]*
t, L(t)=13	s, b, a, c, d, t	$\varnothing$						

Đường đi ngắn nhất: s → b → a → c → d → t

BÀI TẬP

- **Bài 10**: Tìm độ dài đường đi ngắn nhất giữa *a* và *z* trong đồ thị sau: