BÀI 1

CÁC KIẾN THỨC CƠ SỞ

Vũ Thương Huyền

huyenvt@tlu.edu.vn

NỘI DUNG

- **Logic**
- **Sự tương đương các mệnh đề**
- **Vị từ và lượng từ**
- **Các phép suy diễn**
- **Chuẩn tắc hội, chuẩn tắc tuyển**
- **Các phương pháp chứng minh**

1.1 LOGIC

- Là kiến thức cơ sở cho lập luận toán học
- Bao gồm: logic mệnh đề và logic vị từ
- **Ứng dụng:**
  - ✓ Thiết kế máy tính
  - ✓ Đặc tả hệ thống
  - ✓ Trí tuệ nhân tạo
  - ✓ Lập trình máy tính
  - ✓ Ngôn ngữ lập trình
  - ✓ Các lĩnh vực khác của khoa học máy tính

- Là logic đơn giản nhất

- **Mệnh đề:** *Mệnh đề là một câu đúng hoặc sai*

  - Kí hiệu các mệnh đề: *p, q, r, s....*

  - Giá trị chân lí của mệnh đề: ***T, F***

- **Ví dụ:**

  - Hà Nội là thủ đô của nước Việt Nam

  - 7 là một số chẵn

  - Bạn ăn cơm chưa?

MỆNH ĐỀ PHỨC HỢP

- Được tạo ra từ các mệnh đề bằng cách sử dụng các toán tử logic

- **Toán tử logic:**
  - Phủ định
  - Hội
  - Tuyển
  - Tuyển loại
  - Mệnh đề kéo theo
  - Mệnh đề hai điều kiện

PHỦ ĐỊNH

- **Định nghĩa:**

Giả sử ***p*** là một mệnh đề. Câu "*Không phải là **p***" là một mệnh đề, gọi là ***phủ định*** của ***p***.

- Kí hiệu: $\neg p$ hoặc $\overline{p}$

- **Bảng chân lí:**

p	$\neg p$
T	F
F	T

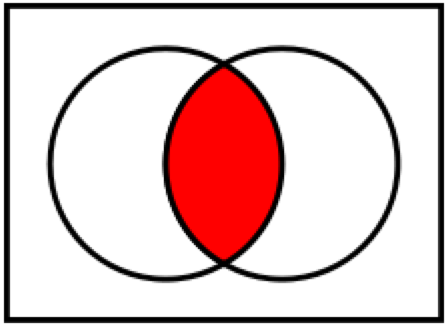
- **Ví dụ:**

- 10 không là số nguyên tố
- $5+2 \neq 8$

- **Định nghĩa:**

Giả sử ***p*** và ***q*** là hai mệnh đề. Mệnh đề "***p v***à ***q***" là một mệnh đề, đúng khi cả hai đều đúng, sai trong các trường hợp còn lại. Mệnh đề $p \wedge q$ gọi là ***hội*** của ***p*** và ***q***.

- Kí hiệu: $p \wedge q$

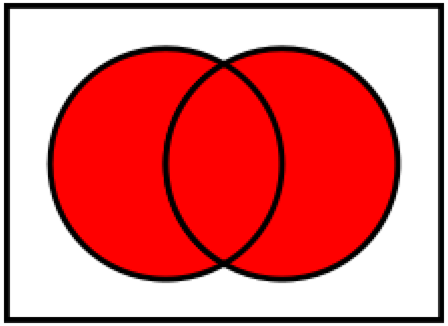


- **Ví dụ:**
  - 2 là số nguyên tố và 2 là số chẵn
  - 4 là số nguyên tố và 4 là số chẵn

- **Định nghĩa:**

Giả sử ***p*** và ***q*** là hai mệnh đề. Mệnh đề "***p*** hoặc ***q***" là một mệnh đề, sai khi cả hai đều sai, đúng trong các trường hợp còn lại. Mệnh đề $\boldsymbol{p \vee q}$ gọi là ***tuyển*** của ***p*** và ***q***.

- Kí hiệu: $\boldsymbol{p \vee q}$



- **Ví dụ:**

  - Hôm nay trời mưa hoặc lớp học được nghỉ
  - 4 là số nguyên tố hoặc 4 là số chẵn

- **Bảng giá trị chân lí:**

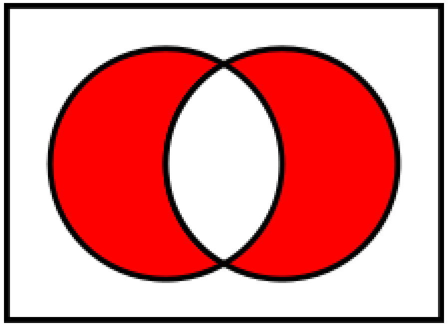
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

TUYỂN LOẠI

- **Định nghĩa:**

Giả sử $\boldsymbol{p}$ và $\boldsymbol{q}$ là hai mệnh đề. Mệnh đề tuyển loại của $\boldsymbol{p}$ và $\boldsymbol{q}$, được kí hiệu $\boldsymbol{p} \oplus \boldsymbol{q}$ là một mệnh đề chỉ đúng khi một trong hai mệnh đề đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

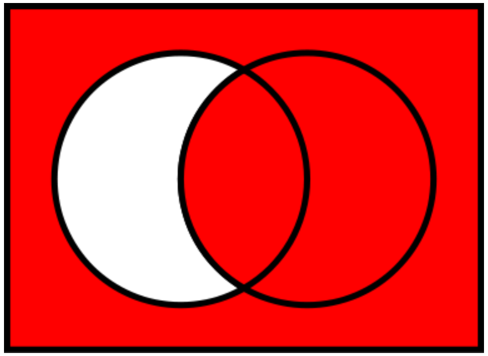


MỆNH ĐỀ KÉO THEO

- **Định nghĩa:**

> Giả sử ***p*** và ***q*** là hai mệnh đề. ***Mệnh đề kéo*** theo ***p*** → ***q*** là một mệnh đề chỉ sai khi ***p*** đúng và ***q*** sai, còn đúng trong các trường hợp còn lại.

- Kí hiệu: ***p*** → ***q***
- "Nếu ***p*** thì ***q***" "***p*** kéo theo ***q***"
- "***p*** chỉ nếu ***q***" "***p*** là điều kiện đủ của ***q***"
- "***q*** bất cứ khi nào ***p***" "***q*** là điều kiện cần của ***p***"



- **Ví dụ:**
  - Nếu hôm nay là thứ 2 thì 2*2=4

MỆNH ĐỀ KÉO THEO

- Mệnh đề ***đảo*** của $\boldsymbol{p \to q}$ là $\boldsymbol{q \to p}$
- Mệnh đề ***phản đảo*** của $\boldsymbol{p \to q}$ là $\boldsymbol{\neg q \to \neg p}$
- Mệnh đề ***nghịch đảo*** của $\boldsymbol{p \to q}$ là $\boldsymbol{\neg p \to \neg q}$

- **Ví dụ:** *Nếu trời nắng, tôi rửa xe*

- $\boldsymbol{p}$: trời nắng; $\boldsymbol{q}$:tôi rửa xe
- Mệnh đề đảo: *Nếu tôi rửa xe, trời nắng*
- Mệnh đề phản đảo: *Nếu tôi không rửa xe, trời không nắng*
- Mệnh đề nghịch đảo: *Nếu trời không nắng, tôi không rửa xe*

MỆNH ĐỀ HAI ĐIỀU KIỆN

- **Định nghĩa:**

Cho $\boldsymbol{p}$ và $\boldsymbol{q}$ là hai mệnh đề. Mệnh đề hai điều kiện $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ là một mệnh đề đúng khi $\boldsymbol{p}$ và $\boldsymbol{q}$ có cùng giá trị chân lí và sai trong các trường hợp còn lại.

- Kí hiệu: $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$
- Tương đương với mệnh đề: $(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{p})$

- **Ví dụ:**

Con đi chơi nếu và chỉ nếu con làm hết bài tập

MỆNH ĐỀ KÉO THEO, HAI ĐIỀU KIỆN

- **Bảng giá trị chân lí:**

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	T

- **Thứ tự ưu tiên:**

Toán tử	Độ ưu tiên
¬	1
∧ ∨	2 3
→ ↔	4 5

BÀI TẬP

- **Bài 1**: **Lập bảng giá trị chân lí cho mệnh đề sau:**

a. $(p \to q) \wedge (\neg q \leftrightarrow p)$

b. $\left(\neg p \wedge (p \to q)\right) \to \neg q$

c. $\left(X \wedge Y \vee (X \wedge \neg Y)\right) \wedge \neg X$

BÀI TẬP

- **Bài 2**: Tìm phủ định của các mệnh đề:

  a) Hôm nay là thứ năm

  b) Không có ô nhiễm ở Hà Nội

  c) 2 +1 =3

  d) Mùa hè ở Hà Nội nắng và nóng

BÀI TẬP

- **Bài 3**: Cho p và q là hai mệnh đề:

  p: Tôi đã mua vé xổ số tuần này

  q: Tôi đã trúng giải độc đắc một triệu đô la vào thứ sáu

Diễn đạt các mệnh đề sau bằng ngôn ngữ thông thường:

a) $\neg p$ **b)** $p \vee q$ **c)** $p \rightarrow q$

d) $p \wedge q$ **e)** $p \leftrightarrow q$ **f)** $\neg p \rightarrow \neg q$

- **Bài 4**: Hãy xác định xem mỗi mệnh đề kéo theo sau là đúng hay sai

  a) Nếu 1+1 = 2 thì 2 + 2 = 5

  b) Nếu 1+ 1 = 3 thì 2 + 2 = 4

  c) Nếu lợn biết bay thì 1+1=3

  d) Nếu 1+1 = 3 thì chúa tồn tại

ỨNG DỤNG CỦA LOGIC MỆNH ĐỀ

- **Dịch câu tiếng anh**
- **Đặc tả hệ thống**
- **Tìm kiếm logic**
- **Trò chơi logic**
- **Thiết kế mạch**

1.2 SỰ TƯƠNG ĐƯƠNG CỦA CÁC MỆNH ĐỀ

- **Định nghĩa:**

- Mệnh đề phức hợp luôn luôn đúng với bất kì giá trị chân lí của mệnh đề thành phần gọi là ***hằng đúng***
- Mệnh đề luôn luôn sai gọi là ***mâu thuẫn***
- Mệnh đề không đúng, không sai gọi là ***tiếp liên***

- **Ví dụ:**

1. $(p \vee T)$
2. $(p \vee \neg p)$
3. $(p \wedge F)$
4. $(p \wedge \neg p)$

- **Định nghĩa:**

> Mệnh đề $\boldsymbol{p}$ và $\boldsymbol{q}$ được gọi là tương đương logic nếu $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ là hằng đúng. Kí hiệu $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{q}$

- **Ví dụ:** Chứng minh rằng các mệnh đề sau là tương đương logic

1. $\neg(p \vee q)$ **và** $\neg p \wedge \neg q$
2. $p \rightarrow q$ **và** $\neg p \vee q$

CÁC TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC

Các tương đương logic	
Tương đương	**Tên gọi**
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Luật đồng nhất
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Luật trội
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Luật lũy đẳng
$\neg(\neg p) \equiv p$	Luật phủ định kép
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Luật giao hoán
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Luật kết hợp

CÁC TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC

Các tương đương logic	
Tương đương	**Tên gọi**
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Luật phân phối
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Luật De Morgan
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Luật hút thu
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Luật phủ định

CÁC TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC

Tương đương logic của mệnh đề kéo theo
$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \to q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

Tương đương logic của mệnh đề hai điều kiện
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

BÀI TẬP

- **Bài 5**: Chứng minh mệnh đề sau là tương đương:

a. $(p \leftrightarrow q)$ và $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

b. $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ và $p \rightarrow (q \vee r)$

c. $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ và $(p \wedge q) \rightarrow r$

1.3 VỊ TỪ VÀ LƯỢNG TỪ

- **Cho câu sau:**

$$x>3$$

$$X = Y+3$$

$$X + Y = Z$$

- **<u>Cho câu sau:</u>**

$$\underbrace{x}_{\text{biến}} \; \underbrace{> 3}_{\text{vị từ}}$$

  - Ký hiệu ***P*(*x*)** *cho câu “x > 3”*
  - ***P*** là kí hiệu *vị từ “ >3”* (Tính chất của biến *x*)
  - ***P*(*x*)** là ***giá trị của hàm mệnh đề P tại x***. Khi biến *x* được gán cho một giá trị thì câu *P(x)* trở thành mệnh đề.

- **<u>Ví dụ:</u>** Cho một logic vị từ *P(x)* biểu diễn câu sau:

  x là số nguyên tố

  Xác định giá trị chân lí của các mệnh đề: *P(2)*, *P(4)*, *P(7)*

- **Lượng từ hóa**: để biến các hàm mệnh đề thành mệnh đề
- 2 lượng từ hóa:
  - Lượng từ hóa phổ quát
  - Lượng từ hóa tồn tại

- **Định nghĩa:**

Lượng từ hóa phổ quát (với mọi) của P(x) là mệnh đề:
"P(x) đúng với mọi giá trị của x trong không gian"

- Kí hiệu: $\forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$

- **Ví dụ:**

Giả sử $P(x)$ là câu **"x > x-1"**. Xác định giá trị chân lí của lượng từ hóa $\forall x P(x)$?

LƯỢNG TỪ HÓA TỒN TẠI

- **Định nghĩa:**

Lượng từ hóa tồn tại của P(x) là mệnh đề:
"tồn tại một phần tử x trong không gian sao cho P(x) là đúng"

- Kí hiệu: $\exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$

- **Ví dụ:**

Giả sử $P(x)$ là câu **"x > 5 và x là số thực"**. Xác định giá trị chân lí của lượng từ hóa $\exists x P(x)$?

PHỦ ĐỊNH CÁC LƯỢNG TỪ

Phủ định	**Mệnh đề tương đương**	**Khi nào phủ định đúng?**	**Khi nào sai?**
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	P(x) sai với mọi x	Có một x để P(x) là đúng
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Có một x để P(x) là sai	P(x) đúng với mọi x

- **Ví dụ:**

Xác định phủ định của mệnh đề $\forall x(x^2 \geq 0)$?

BÀI TẬP

- **Bài 1**: Xác định chân lí các mệnh đề sau, nếu không gian bao gồm các số nguyên:

  a) $\forall n(n^2 \geq 0)$; **b)** $\exists n(n^2 = 2)$

  c) $\forall n(n^2 \geq n)$; **d)** $\exists n(n^2 < 0)$;

- **Bài 2**: Giả sử không gian của hàm mệnh đề $P(x)$ gồm các số nguyên 0, 1, 2, 3 và 4. Hãy viết các mệnh đề sau bằng cách dùng các phép hội, tuyển, phủ định:

  a) $\forall xP(x)$; **b)** $\exists xP(x)$

  c) $\forall x\neg P(x)$; **d)** $\neg(\exists xP(x))$;

BÀI TẬP

- **Bài 3**: Dịch mệnh đề sau ra ngôn ngữ thông thường, với C(x) là câu "**x là diễn viên hài**", F(x) là "**x thật vui nhộn**" và không gian là tất cả mọi người trên thế giới.

a. $(\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))$

b. $(\exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))$

BÀI TẬP

- **Bài 4**: **Dịch những câu sau đây thành các biểu thức logic nhờ sử dụng vị từ, lượng từ và liên từ logic:**

  a)Không có ai là hoàn hảo

  b)Không phải mọi người đều hoàn hảo

  c)Tất cả các bạn của bạn đều hoàn hảo

  d)Một trong số các bạn của bạn là hoàn hảo

  e)Mọi người đều là bạn của bạn và hoàn hảo

  f)Không phải mọi người đều là bạn của bạn hoặc có ai đó là không hoàn hảo.

Các lượng từ xuất hiện bên trong các lượng từ khác

- **Ví dụ 1:**

Giả sử rằng không gian của các biến *x* và *y* là các số thực. Ta có mệnh đề:

$$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$

Tương tự:

$$\forall x \exists y (x + y = 0)$$

- **<u>Ví dụ 2:</u>**

Dịch mệnh đề sau sang ngôn ngữ thông thường:

$$\forall \boldsymbol{x}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) \lor \exists \boldsymbol{y}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{y}) \land \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})))$$

Trong đó:

- *C(x)* : *x* có máy vi tính
- *F(x,y)*: *x* và *y* là bạn

Với không gian của cả *x* và *y* là toàn thể sinh viên trong trường

CÁC LƯỢNG TỪ LỒNG NHAU

- **Ví dụ 3:**

Biểu diễn phủ định của mệnh đề:

$$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y}(\boldsymbol{xy} = \mathbf{1})$$

Sao cho không có dấu phủ định đứng trước các lượng từ.

BÀI TẬP

- **Bài 5**:

Cho *L(x,y)* là câu "*x* yêu *y*", với không gian của *x* và *y* là tập hợp mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

a. **Mọi người đều yêu Jerry**

b. **Mọi người đều yêu một ai đó**

c. **Có một người mà tất cả mọi người đều yêu**

d. **Không có ai yêu tất cả mọi người**

e. **Có một người mà không ai yêu cả**

1.5 CÁC DẠNG CHUẨN TẮC HỘI, TUYỂN

DẠNG CHUẨN TẮC

Dạng chuẩn tắc (chính tắc) của một biểu thức logic là biểu diễn biểu thức về dạng đơn giản, chỉ bao gồm các **phép toán phủ định, hội, tuyển** của các mệnh đề.

- **Ví dụ:**

$$p \land q \land \neg r$$

- **Định nghĩa:**

> - Hội các mệnh đề và phủ định của nó gọi là ***hội sơ cấp (HSC)***
> - Tuyển các mệnh đề và phủ định của nó gọi là ***tuyển sơ cấp (TSC)***

- **Ví dụ:**

$$\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \wedge \neg \boldsymbol{r} \wedge \neg \boldsymbol{p} \qquad \textbf{(HSC)}$$

$$\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r} \vee \neg \boldsymbol{p} \qquad \textbf{(TSC)}$$

DẠNG CHUẨN HỘI

- **Định nghĩa:**

- Giả sử A là một biểu thức. Nếu $A' \equiv A$ mà A' là hội của các TSC thì A' được gọi là ***dạng chuẩn tắc hội (DCTH) của A.***
- *Tức là* $\boldsymbol{A' \equiv (TSC)_1 \wedge (TSC)_2 \wedge \cdots \wedge (TSC)_n}$

- **Ví dụ:**

$$\boldsymbol{A \equiv ((\neg p \wedge q) \rightarrow q) \wedge ((p \wedge \neg q \rightarrow p)}$$

$$\boldsymbol{A' \equiv (p \vee \neg q \vee q) \wedge (\neg p \vee q \vee p)}$$

- **Định nghĩa:**

> - Giả sử A là một biểu thức. Nếu $A'' \equiv A$ mà A'' là tuyển của các HSC thì A' được gọi là ***dạng chuẩn tắc tuyển (DCTT) của A.***
> - *Tức là* $\boldsymbol{A'' \equiv (HSC)_1 \vee (HSC)_2 \vee \cdots \vee (HSC)_n}$

- **Ví dụ:**

$$\boldsymbol{A'' \equiv (p \wedge q \wedge r \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge p)}$$

DẠNG CHUẨN HỘI, TUYỂN

- **Định lý 1:**

Mọi biểu thức trong logic mệnh đề đều có **DCTT** và **DCTH**

- **Ví dụ:**

$$A \equiv X \wedge (X \rightarrow Y)$$

$$A' \equiv X \wedge (\neg X \vee Y) \quad \textbf{(DCTH)}$$

$$A'' \equiv (X \wedge \neg X) \vee (X \wedge Y) \quad \textbf{(DCTT)}$$

DẠNG CHUẨN HỘI, TUYỂN

- **Định lý 2:**

Điều kiện cần và đủ để biểu thức **A là hằng đúng** thì trong DCTH của A mỗi TSC chứa một mệnh đề đồng thời với phủ định của nó

Điều kiện cần và đủ để biểu thức **A là hằng sai** thì trong DCTT của A mỗi HSC chứa một mệnh đề đồng thời với phủ định của nó

BÀI TẬP

- **Bài 6**: Chứng minh mệnh đề sau là hằng đúng bằng cách xây dựng các dạng chuẩn tắc:

a. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

b. $\neg((p \to q) \to (p \to r)) \to \neg(p \to (q \to r))$

1.6 CÁC QUY TẮC SUY DIỄN

- **Định lí**:

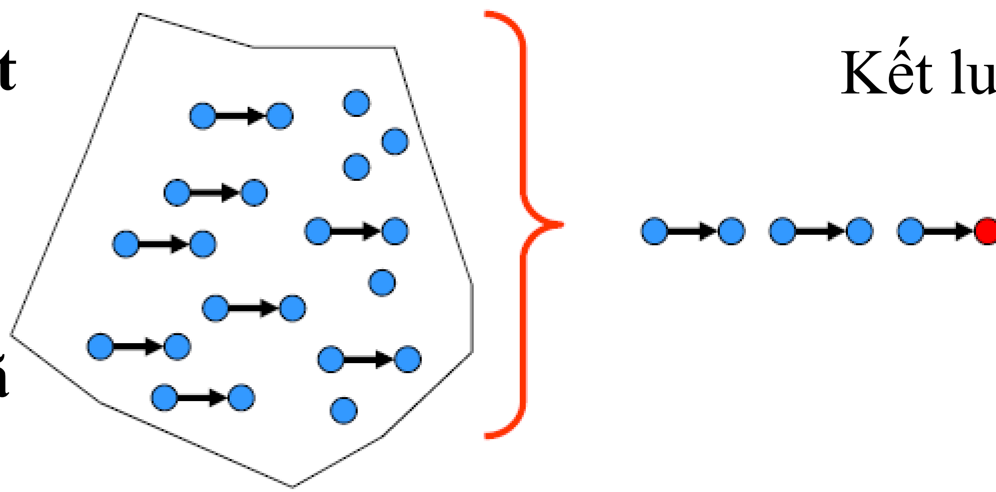
  - Là một phát biểu có thể chỉ ra được là đúng.

  - Định lí thường có dạng như sau:

$$\underbrace{(\boldsymbol{p_1} \wedge \boldsymbol{p_2} \wedge \boldsymbol{p_3} \dots \wedge \boldsymbol{p_n})}_{\text{Giả thuyết}} \rightarrow \underbrace{\boldsymbol{q}}_{\text{Kết luận}}$$

- **Chứng minh**: là những suy luận ra **mệnh đề mới** từ những **mệnh đề cũ**.

Các giả thuyết
+
Các tiên đề
+
Các định lí đã chứng minh



Kết luận

ĐÚNG **ĐÚNG?**

Logic là công cụ cho phép phân tích tính đúng đắn của các chứng minh

Các quy tắc suy diễn trong logic là cơ sở để biết được một lập luận hay chứng minh là đúng hay sai

- **Ví dụ:**
  Tam giác cân có một góc bằng 60 độ thì tam giác đó là tam giác đều

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \to q \equiv T$$

Mô hình suy diễn của biểu thức trên là;

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

- **<u>Ví dụ:</u>**

  Quy tắc suy luận nào là cơ sở của suy diễn sau: **"Bây giờ trời quá băng giá. Vậy thì bây giờ hoặc là trời quá băng giá hoặc trời đang mưa"**

  - ***p : Bây giờ trời quá băng giá***
  - ***q: Bây giờ trời đang mưa***
  - **Khi đó suy diễn có dạng:**

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

- **Quy tắc suy diễn cộng:**

Cơ sở của quy tắc suy diễn là hằng đúng: $p \to (p \vee q)$

Mô hình suy diễn

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

- **Quy tắc suy diễn rút gọn:**

Cơ sở của quy tắc suy diễn rút gọn là hằng đúng: $(p \wedge q) \to p$

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

- **Ví dụ:**

  Dùng quy tắc suy diễn, chỉ ra công thức sau là hằng đúng:

$$(\mathbf{p} \wedge \boldsymbol{q}) \rightarrow (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$$

- **Quy tắc suy diễn khẳng định:**

Cơ sở của quy tắc suy diễn là hằng đúng: $(p \land (p \to q)) \to q$

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to q} \\ \therefore q \end{array}$$

- **Quy tắc suy diễn phủ định:**

Cơ sở của quy tắc suy diễn là hằng đúng: $((p \to q) \land \neg q) \to \neg p$

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\neg q \qquad\quad} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

- **Ví dụ:**

  Nếu được thưởng cuối năm An sẽ đi Đà Lạt. Nếu đi Đà Lạt thì An sẽ thăm Thiền Viện. Mà An không thăm Thiền Viện. Vậy An không được thưởng cuối năm.

  Suy luận của đoạn văn trên có đúng không?

- **Quy tắc suy diễn tam đoạn luận:**

Cơ sở của quy tắc suy diễn là hằng đúng:

$$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$$

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

- **Quy tắc suy diễn tam đoạn luận tuyển:**

Cơ sở của quy tắc suy diễn là hằng đúng:

$$\big((\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \neg \boldsymbol{p}\big) \rightarrow \boldsymbol{q}$$

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \\ \neg \boldsymbol{p} \\ \hline \therefore \boldsymbol{q} \end{array}$$

- **Ví dụ:**

  Bình đi chơi thì Bình không học toán rời rạc. Bình không học toán rời rạc thì Bình thi trượt toán rời rạc. Mà Bình thích đi chơi. Vậy Bình thi trượt toán rời rạc.

  Suy luận của đoạn văn trên có đúng không?

- **Quy tắc suy diễn mâu thuẫn:**

Cơ sở của quy tắc suy diễn là hằng đúng:

$$(\boldsymbol{p_1} \wedge \boldsymbol{p_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{p_n}) \rightarrow \boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{T}$$

$$(\boldsymbol{p_1} \wedge \boldsymbol{p_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{p_n}) \wedge \neg \boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{F}$$

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{p_1} \\ \boldsymbol{p_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p_n} \\ \hline \therefore \boldsymbol{q} \end{array} \equiv \begin{array}{l} \boldsymbol{p_1} \\ \boldsymbol{p_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p_n} \\ \neg \boldsymbol{q} \\ \hline \therefore \boldsymbol{F} \end{array}$$

- **Quy tắc suy diễn theo trường hợp:**

Cơ sở của quy tắc suy diễn là hằng đúng:

$$\big((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)\big) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$$

Mô hình suy diễn

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore (p \vee q) \rightarrow r \end{array}$$

- **<u>Ví dụ 1:</u>**

Chỉ ra suy luận dưới đây là đúng:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg p \to r \\ r \to s \\ \hline \therefore \neg q \to s \end{array}$$

- **Ví dụ:**

Suy luận dưới đây có đúng không:

Nếu muốn đi họp sáng thứ ba thì An phải dậy sớm. Nếu An đi nghe nhạc tối thứ hai thì An sẽ về muộn. Nếu An về muộn và thức dậy sớm thì An phải đi họp sáng thứ ba và chỉ được ngủ dưới 7 giờ trong ngày. Nhưng An không thể đi họp nếu chỉ ngủ dưới 7 giờ. Vậy hoặc An không đi nghe nhạc tối thứ hai hoặc An phải bỏ họp sáng thứ ba.

BÀI TẬP

- **Bài 7**: Chỉ ra công thức dưới đây là hằng đúng áp dụng các quy tắc suy diễn

a. $(X_1 \wedge (X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_3 \vee X_4) \wedge (X_4 \rightarrow \overline{X}_2)) \rightarrow (X_3 \vee X_5)$

b.

$$\begin{array}{l} \left(\overline{(X_1} \vee X_2\right) \rightarrow X_3 \\ X_3 \rightarrow (X_4 \vee X_5) \\ \overline{X_4} \wedge \overline{X_6} \\ \overline{X_6} \rightarrow \overline{X_5} \\ \hline \therefore X_1 \end{array}$$

BÀI TẬP

- **Bài 8**: Nếu nghệ sĩ nhân dân (NSND) X không trình diễn hay số vé bán ra ít hơn 50 vé thì đêm biểu diễn ở Công viên Hồ Tây bị hủy và ông bầu rất buồn. Nếu đêm biểu diễn hủy bỏ thì phải trả tiền vé lại cho người xem. Tiền vé đã không trả lại cho người xem. Vậy NSND X đã trình diễn.
- Suy luận trên có đúng không?

1.5 CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

- Làm sao để biết được giá trị đúng/sai của mệnh đề?

- Có những phương pháp nào?

Các phương pháp chứng minh định lí:

- Chứng minh trực tiếp
- Chứng minh gián tiếp
- Chứng minh bằng phản chứng
- Chứng minh từng trường hợp
- Chứng minh tính tương đương

Định nghĩa 1:

Số nguyên n là ***chẵn*** nếu tồn tại một số nguyên k sao cho $n = 2k$ và là ***lẻ*** nếu tồn tại một số nguyên k sao cho $n = 2k+1$.

Định nghĩa 2:

Số thực r được gọi là ***hữu tỉ*** nếu tồn tại hai số nguyên p và q với $q \neq 0$ sao cho $r = p/q$. Một số thực không phải là hữu tỉ được gọi là ***vô tỉ***.

Chứng minh trực tiếp:

Chứng minh mệnh đề kéo theo $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ bằng cách chỉ ra nếu $\boldsymbol{p}$ đúng thì $\boldsymbol{q}$ cũng cần phải đúng.

- **Ví dụ:**

Chứng minh trực tiếp: *"Nếu $\mathbf{n}$ là một số nguyên lẻ thì $\mathbf{n}^2$ cũng là một số nguyên lẻ"*

Chứng minh gián tiếp:

Chứng minh mệnh đề kéo theo $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ bằng cách chứng tỏ

$\neg \boldsymbol{q} \rightarrow \neg \boldsymbol{p}$ là đúng.

- **Ví dụ:**

Chứng minh gián tiếp: *"Nếu $3\boldsymbol{n} + \mathbf{2}$ là một số lẻ thì $\boldsymbol{n}$ cũng lẻ"*

Chứng minh bằng phản chứng:

Chỉ ra mệnh đề $\neg \boldsymbol{p}$ sai, do đó $\boldsymbol{p}$ là đúng

- **Ví dụ:**

Chứng minh bằng phản chứng: "$\sqrt{\mathbf{2}}$ là vô tỉ"

Chứng minh từng trường hợp:

Để chứng minh một mệnh đề kéo theo có dạng:

$$(\boldsymbol{p1} \lor \boldsymbol{p2} \lor \cdots \lor \boldsymbol{pn}) \rightarrow \boldsymbol{q}$$

có thể dùng hằng đúng

$$[(\boldsymbol{p1} \lor \boldsymbol{p2} \lor \ldots \lor \boldsymbol{pn}) \rightarrow \boldsymbol{q}] \leftrightarrow [(\boldsymbol{p1} \rightarrow \boldsymbol{q}) \land (\boldsymbol{p2} \rightarrow \boldsymbol{q}) \land (\boldsymbol{pn} \rightarrow \boldsymbol{q})]$$

Chứng minh tính tương đương:

Để chứng minh một mệnh đề kéo theo có dạng $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$, ta sử dụng hằng đúng

$$\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q} \equiv (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{p})$$

- **Ví dụ:**

Chứng minh định lí: "*n* là số lẻ nếu và chỉ nếu n^2 là lẻ"

BÀI TẬP

- **Bài 1**: Chứng minh ***x là số vô tỉ thì 1/x cũng là số vô tỉ***

- **Bài 2**: Chứng minh các mệnh đề sau là tương đương

  (i) x là **số chẵn**

  (iii) (x+5) là **một số nguyên lẻ**

  (iv) x^2 là **một số nguyên chẵn**

BÀI TẬP

- **Bài 3**: Chứng minh *trong số 64 ngày được chọn thì ít nhất có 10 ngày cùng rơi vào một thứ trong tuần.*

- **Bài 4**: Chứng minh rằng x, y là 2 số thực, khi đó:

$$max(x, y) + min(x,y) = x + y$$